Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 14

ÉNONCÉ

Soit " a " un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (U_n) définie par:

$$U_0 = a \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ U_{n+1} = e^{2U_n} - e^{U_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire: $U_{n+1} = e^{U_n}(e^{U_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par:

$$g(x) = e^{2x} - e^{x} - x.$$

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x:

$$g'(x) = (e^{x} - 1)(2e^{x} + 1).$$

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $U_{n+1} - U_n = g(U_n)$, étudier le sens de variation de la suite (U_n).

2. Dans cette question, on suppose que: $a \leqslant 0$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n: $U_n \leqslant 0$.

b. Déduire des questions précédentes que la suite (U_n) est convergente.

c. Dans le cas où " a " vaut 0, donner la limite de la suite (U_n).

3. Dans cette question, on suppose que: $a > 0$.

La suite (U_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $U_n \geq a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a: $U_{n+1} - U_n \geq g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a:

$$U_n \geq a + n \times g(a).$$

c. Déterminer la limite de la suite (U_n).