

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Récurrance, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. a. a1. Calculons g' :

Ici, pour tout réel x : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

Posons: $g = u + v + w$,

avec: $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = e^{2x}$, $v(x) = -e^x$ et $w(x) = -x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions "exponentielle".

De plus, la fonction w est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.

Par conséquent, g est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de 3 fonctions dérivables sur \mathbb{R} : $u + v + w$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer g' sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Au total: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

1. a. a2. Montrons que $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$:

Nous savons que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Or: $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1$

cad: $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Au total, nous avons bien: $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

1. b. Tableau de variation de g + " son minimum ":

- Pour déterminer le minimum de g , résolvons l'équation: $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - e^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)(2e^x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1) = 0 \text{ et/ou } (2e^x + 1) = 0. \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0 \Rightarrow 2e^x > 0 \Rightarrow 2e^x + 1 > 1.$$

$$\text{D'où: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x^* = 0.$$

Le minimum de g est donc le point A , avec: $A(0, g(0))$ cad $A(0, 0)$.

- D'où le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

1. c. Étudions le sens de variation de la suite (U_n) :

$$\text{Soit: } g(U_n) = U_{n+1} - U_n.$$

Ici, n est un entier naturel.

Or, sur \mathbb{N} : $g(U_n) \geq 0$ (tableau de variation précédent).

$$\text{D'où, pour tout entier naturel } n: U_{n+1} - U_n \geq 0 \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n.$$

Donc sur \mathbb{N} , (U_n) est croissante.

2. a. Montrons que, pour tout entier naturel, $U_n \leq 0$, avec $a \leq 0$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $U_n \leq 0$ ".

Initialisation: • $U_0 = a \leq 0$, par hypothèse.

$$\bullet U_1 = e^{2a} - e^a \iff U_1 = e^a (e^a - 1) \leq 0^*.$$

(* car: $e^a > 0$ et $e^a < 1$, avec: $a \leq 0$).

Donc vrai aux rangs " 0 " et " 1 ".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n , $U_n \leq 0$ et montrons qu'alors: $U_{n+1} \leq 0$.

Supposons: $U_n \leq 0$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow e^{U_n} \leq e^0$$

$$\Rightarrow e^{U_n} - 1 \leq e^0 - 1$$

$$\Rightarrow e^{U_n} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow e^{U_n} (e^{U_n} - 1) \leq e^{U_n} \times 0 \quad (\text{car: } e^{U_n} > 0)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq 0.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous savons: $U_n \leq 0$.

2. b. (U_n) convergente ?

Nous savons que: • (U_n) est majorée par " 0 " car: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 0$;

• (U_n) est croissante.

Etant croissante et majorée, nous pouvons affirmer que: (U_n) est convergente.

2. c. Déterminons la limite de la suite (U_n) quand $a = 0$:

- Si $a = 0$:
- $U_0 = 0$
 - $U_1 = e^{2 \times 0} - e^0 \Rightarrow U_1 = 0$
 - $U_2 = e^{2 \times 0} - e^0 \Rightarrow U_2 = 0$
 - ...
 - $U_{n-1} = 0$
 - $U_n = 0$.

Ainsi, quand $a = 0$, nous sommes en présence d'une suite stationnaire car:

$$U_0 = U_1 = U_2 = \dots = U_n.$$

D'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

3. a. Démontrons que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n \geq g(a)$:

Sur $[0, +\infty[$, nous savons que la fonction g est croissante.

Par conséquent: $U_n \geq a \Leftrightarrow g(U_n) \geq g(a)$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \geq g(a), \quad (\text{car: } g(U_n) = U_{n+1} - U_n).$$

Au total, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} - U_n \geq g(a)$, avec $a > 0$.

3. b. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $U_n \geq a + n \times g(a)$, quand $a > 0$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $U_n \geq a + n \times g(a)$ ".

Initialisation: • $U_0 \geq a + 0 + g(a)$?

Oui car: $U_0 = a$ et $a \geq a$.

Donc vrai au rang " 0 ".

$$\bullet U_1 \geq a + 1 \times g(a) ?$$

$$\text{D'après la question 3a.: } U_1 \geq U_0 + g(a).$$

$$\text{D'où: } U_1 \geq a + g(a) \iff U_1 \geq a + 1 + g(a).$$

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n , $U_n \geq a + n \times g(a)$
et montrons qu'alors: $U_{n+1} \geq a + (n+1) g(a)$.

Supposons: $U_n \geq a + n \times g(a)$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow U_n + g(a) \geq a + n \times g(a) + g(a)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq a + (n+1) \times g(a) \quad (\text{car: } U_{n+1} \geq U_n + g(a))$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons: $U_n \geq a + n \times g(a)$.

3. c. Déterminons la limite de la suite (U_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a + n \times g(a), \quad \text{car: } U_n \geq a + n \times g(a),$$

$$= +\infty, \quad \text{car: } g(a) > 0, \text{ d'après le tableau de variation.}$$

D'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$, et donc quand $a > 0$, (U_n) est divergente.