

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Récurrance, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Déterminons la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes:

Déterminer la température au bout de 3 minutes revient à calculer T_3 .

Or: • $T_0 = 25^\circ \text{C}$,

• $T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 \Rightarrow T_1 = 36,25^\circ \text{C}$,

• $T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 \Rightarrow T_2 = 45,8125^\circ \text{C}$,

• $T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 \Rightarrow T_3 = 53,94^\circ \text{C}$.

En arrondissant à l'unité, nous pouvons affirmer que la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes sera de: 54 degrés Celsius.

2. Démontrons que, pour tout entier naturel n , $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$ ".

Initialisation: • $T_0 = 100 - 75 \times (0,85)^0 \Rightarrow T_0 \Rightarrow 25$.

Or $T_0 = 25^\circ \text{C}$, d'après l'énoncé. Donc vrai au rang "0".

• $T_1 = 100 - 75 \times (0,85)^1 \Rightarrow T_1 = 36,25$.

Or $T_1 = 36,25$, d'après (1). Donc vrai au rang "1".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n , $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$ et montrons qu'alors: $T_{n+1} = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}$.

Supposons: $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow 0,85 T_n = 0,85(100 - 75 \times 0,85)^n \\ &\Rightarrow 0,85 T_n = 85 - 75 \times (0,85)^{(n+1)} \\ &\Rightarrow 0,85 T_n + 15 = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)} \\ &\Rightarrow T_{n+1} = 100 - 75 \times (0,85)^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons:

$$T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n.$$

3. Déterminons au bout de combien de minutes la stérilisation débutera:

D'après l'énoncé, la stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C .

Donc la stérilisation débutera à partir du moment où: $T_n > 85$.

$$\begin{aligned} T_n > 85 &\Leftrightarrow 100 - 75 \times 0,85^n > 85 \\ &\Leftrightarrow -75 \times 0,85^n > -15 \\ &\Leftrightarrow 75 \times 0,85^n < 15 \\ &\Leftrightarrow 0,85^n < 0,2 \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,85) < \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)}, \text{ car: } 0,85 \in]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,85) < 0 \\ &\Rightarrow n > 9,90. \end{aligned}$$

Nous prendrons $n = 10$ minutes car n est un entier naturel.

En conclusion, au bout de 10 minutes la stérilisation débutera.