Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 10

CORRECTION

1. Calculons U_1:

D'après l'énoncé:

$$\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } x \in [0;1],\ g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}, \\ \bullet\ U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = g(U_n). \end{cases}$$

Ainsi: $U_1 = g(U_0) \iff U_1 = g(0) \implies U_1 = \dfrac{3}{8}$.

D'où: $U_1 = \dfrac{3}{8}$.

2. Démontrons que g est croissante sur [0; 1]:

Pour cela, nous devons calculer la dérivée de g sur [0; 1].

Or g est dérivable sur IR comme fonction polynôme.

Donc g est dérivable sur [0; 1] et nous avons: $g'(x) = \dfrac{3}{4}x^2$.

Or pour tout $x \in [0;1]$, $g'(x) \geqslant 0$.

Donc nous pouvons affirmer que sur [0; 1]: g est croissante.

3. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ ".

Initialisation: • $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 1$?

oui car nous avons bien: $0 \leqslant 0 \leqslant \frac{3}{8} \leqslant 1.$

Donc vrai au rang " 0 ".

• $0 \leqslant U_1 \leqslant U_2 \leqslant 1$?

oui car nous avons bien: $0 \leqslant \frac{3}{8} \leqslant \underbrace{0,388}_{U_2} \leqslant 1.$

Donc vrai au rang "1".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ et montrons qu'alors: $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1.$

Supposons: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

Comme g est croissante sur [0;1], nous pouvons écrire:

$$(1) \Rightarrow g(0) \leqslant g(U_n) \leqslant g(U_{n+1}) \leqslant g(1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leqslant g(U_n) \leqslant g(U_{n+1}) \leqslant \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{3}{8} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \frac{5}{8} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1.$

4. Montrons que la suite (U_n) est convergente et converge vers a:

Nous savons que:

- $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ cad $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$.

  Donc (U_n) est croissante.

- $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ cad $0 \leqslant U_n \leqslant 1$.

  Donc (U_n) est majorée par $M = 1$.

Dans ces conditions, (U_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.