Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 1

ÉNONCÉ

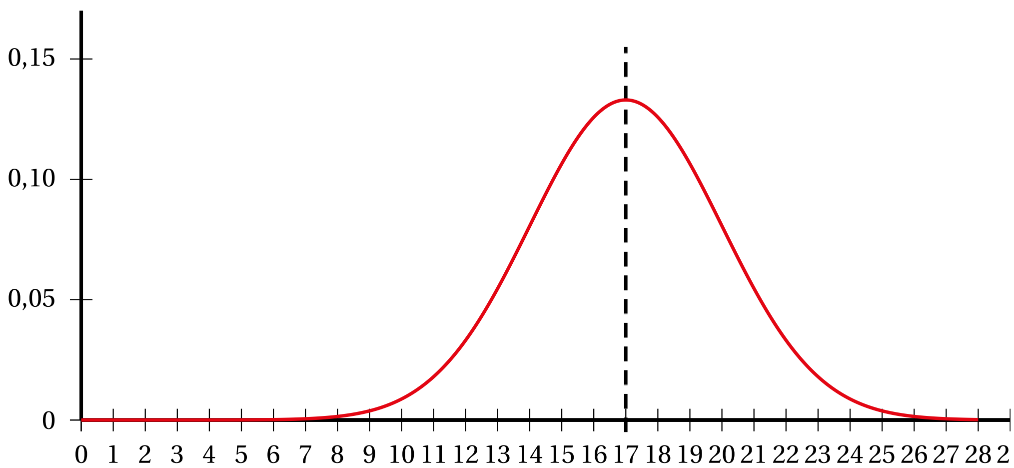
Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo: un jeu de type A et un jeu de type B.

Partie A

Les durées des parties de type A et de type B, exprimées en minutes, peuvent être modélisées respectivement par deux variables aléatoires notées X_A et X_B.

La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9 ; 25]$.

La variable aléatoire X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type 3. La représentation graphique de la fonction de densité de cette loi normale et son axe de symétrie sont donnés ci-dessous.



1. a. Calculer la durée moyenne d'une partie de type A.

b. Préciser à l'aide du graphique la durée moyenne d'une partie de type B.

2. On choisit au hasard, de manière équiprobable, un type de jeu. Quelle est la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes ? On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant:

- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de $0,8$;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de $0,7$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements:

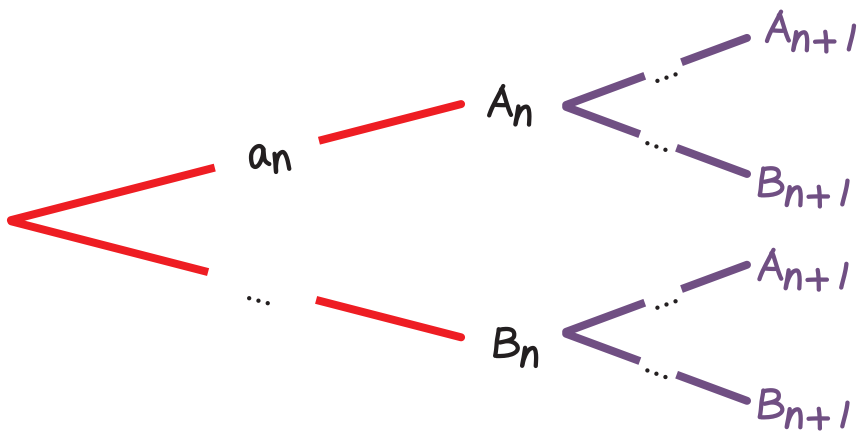
A_n : " la n-ième partie est une partie de type A. "

B_n : " la n-ième partie est une partie de type B. "

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-après.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a: $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.



Dans la suite de l'exercice, on note " **a** " la probabilité que le joueur joue au jeu **A** lors de sa première partie, où " **a** " est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. La suite (a_n) est donc définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par:

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3, \text{ avec } a_1 = a.$$

2. **Étude d'un cas particulier**: Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a:

$$0 \leq a_n \leq 0,6.$$

b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3. **Étude du cas général**: Dans cette question, le réel " **a** " appartient à l'intervalle $[0; 1]$.

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par:

$$U_n = a_n - 0,6.$$

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a:

$$a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6.$$

c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de " **a** " ?

d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre publicité insérée en début des parties de type B. Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?