

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Récurrance, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. a. Calculons la durée moyenne d'une partie de type A:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X_A suit une loi uniforme sur $[9; 25]$.

Dans ces conditions:

$$\bullet f(x_A) = \begin{cases} \frac{1}{25-9} & \text{si } x_A \in [9; 25] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bullet E(X_A) = \frac{9+25}{2}$$

$$\bullet P(a \leq X_A \leq b) = \left[\frac{x_A}{25-9} \right]_a^b$$

Ici, il s'agit de calculer la durée moyenne d'une partie de type A.

Cela revient à calculer: $E(X_A)$.

$$\text{Or: } E(X_A) = \frac{9+25}{2} \quad \text{cad: } E(X_A) = 17 \text{ minutes.}$$

Au total, la durée moyenne d'une partie de type A est de: 17 minutes.

1. b. Précisons à l'aide du graphique la durée moyenne d'une partie de type B:

La courbe représentative, donnée dans l'énoncé, correspond à celle de la densité de probabilité de la loi normale.

Elle a pour axe de symétrie, la droite d'équation: $x = 17$.

Donc nous pouvons affirmer que la durée moyenne d'une partie de type B est: $E(X_B) = 17$ minutes.

Au total, la durée moyenne d'une partie de type B est de: 17 minutes.

Et nous avons donc: X_B suit une loi normale d'espérance $\mu = 17$ mn et d'écart type $\sigma = 3$ mn.

2. Déterminons la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à une durée de 20 minutes:

• Avec le jeu A:

$$P(X_A \leq 20) = P(9 \leq X_A \leq 20)$$

$$= \left[\frac{x_A}{25-9} \right]_9^{20}$$

$$= \frac{20-9}{16} \quad \text{cad: } P(X_A \leq 20) \approx 68,75\% = A.$$

• Avec le jeu B:

$$P(X_B \leq 20) = P\left(\frac{X_B - \mu}{\sigma} \leq \frac{20 - 17}{3}\right)$$

$$= P(T \leq 1), \text{ avec: } T \text{ suit la loi normale centrée réduite.}$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X_B \leq 20) \approx 84,13\% = B.$$

• **Conclusion:**

La probabilité demandée est donc égale à: $\frac{A+B}{2} = 76,44\%$.

Au total, la probabilité pour que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes est d'environ: 76%, au centième près.

Partie B:

I. a. Recopions et complétons l'arbre de probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

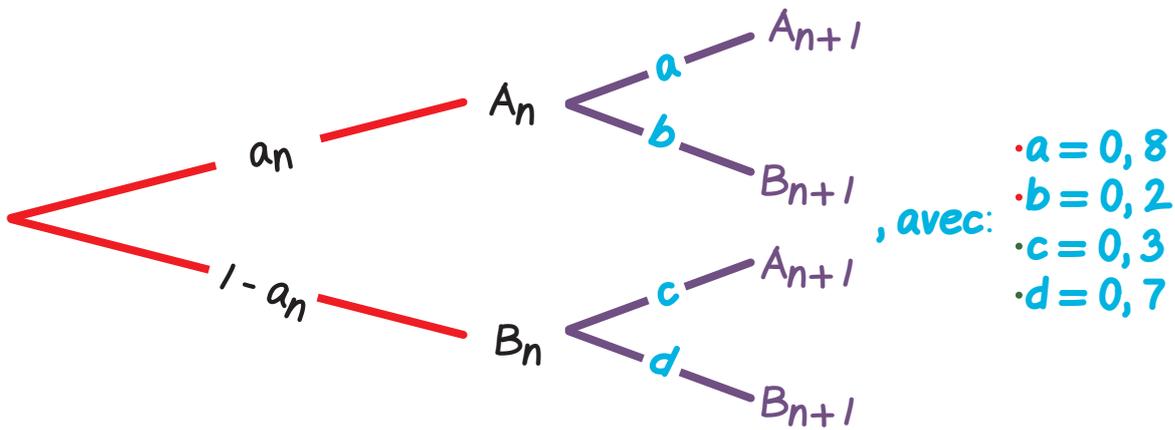
- $A_n =$ " la n -ième partie est de type A ".
- $B_n =$ " la n -ième partie est de type B ".

- $P(A_n) = a_n$
- $P(B_n) = 1 - a_n$.

- $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,8$
- $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1 - 0,8 = 0,2$.

- $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0,7$
- $P_{B_n}(A_{n+1}) = 1 - 0,7 = 0,3$.

D'où l'arbre de probabilités complété suivant:



1. b. Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$:

Il s'agit donc de calculer: $P(A_{n+1})$.

L'événement $A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap B_n)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n). \end{aligned}$$

Ainsi: $P(A_{n+1}) = 0,8 \times a_n + 0,3 \times (1 - a_n)$ **cad:** $P(A_{n+1}) = 0,5a_n + 0,3$.

Au total, pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons:

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = 0,5a_n + 0,3.$$

2. a. Démontrons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq a_n \leq 0,6$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq a_n \leq 0,6$, avec $a_1 = a = 0,5$ ".

Initialisation: $a_1 = a = 0,5$ et $0 \leq 0,5 \leq 0,6$.

Donc: $0 \leq a_1 \leq 0,6$.

Donc vrai au rang " 1".

Hérédité: Soit $n \geq 1$, un entier naturel, supposons $0 \leq a_n \leq 0,6$

et montrons qu'alors: $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$.

Supposons: $0 \leq a_n \leq 0,6$, pour un entier naturel $n \geq 1$ fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow 0,5 \times 0 \leq 0,5 \times a_n \leq 0,5 \times 0,6$$

$$\Rightarrow 0,5 \times 0 + 0,3 \leq 0,5 \times a_n + 0,3 \leq 0,5 \times 0,6 + 0,3$$

$$(a_{n+1} = 0,5 \times a_n + 0,3)$$

$$\Rightarrow 0,3 \leq 0,5 \times a_n + 0,3 \leq 0,6$$

$$\Rightarrow 0 \leq a_{n+1} \leq 0,6.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons bien: $0 \leq a_n \leq 0,6$.

2. b. Montrons que la suite (a_n) est croissante:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de: $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n$$

$$= -0,5a_n + 0,3.$$

Or, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq a_n \leq 0,6$.

Dans ces conditions: $-0,6 \leq -a_n \leq 0$

$$\Leftrightarrow -0,6 \times 0,5 \leq -0,5 \times a_n \leq 0 \times 0,5$$

$$\Leftrightarrow -0,6 \times 0,5 + 0,3 \leq -0,5 \times a_n + 0,3 \leq 0 + 0,3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a_{n+1} - a_n \leq 0,3.$$

Au total, comme pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n \geq 0$: la suite (a_n) est croissante.

2. c. Montrons que la suite (a_n) est convergente et précisons sa limite:

D'après le cours, nous savons que toute suite croissante et majorée est convergente.

Or ici: • La suite (a_n) est croissante pour tout entier naturel $n \geq 1$.

• $0 \leq a_n \leq 0,6$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Donc la suite (a_n) est majorée par $M = 0,6$.

Dans ces conditions: la suite (a_n) étant croissante et majorée, elle est convergente pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Soit l la limite vers laquelle converge la suite (a_n) .

Par unicité de la limite, l est telle que: $l = 0,5l + 0,3$ cad: $l = 0,6$.

$$(a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3)$$

Ainsi: la suite (a_n) converge vers $0,6$.

3. a. Montrons que la suite (a_n) est géométrique:

D'après l'énoncé, nous avons pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n = a_n - 0,6$.

$$\text{D'où: } u_n = a_n - 0,6 \iff u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6$$

$$\iff u_{n+1} = (0,5a_n + 0,3) - 0,6 \quad (1).$$

Or: $u_1 = a_1 - 0,6 \Rightarrow u_1 = 0,5 - 0,6 = -0,1$ et $a_n = u_n + 0,6$.

Ainsi: $(1) \Leftrightarrow U_{n+1} = (0,5 [U_n + 0,6] + 0,3) - 0,6$

$$\Rightarrow U_{n+1} = 0,5 U_n.$$

Par conséquent, (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $U_1 = -0,1$. $(a - 0,6)$

3. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$:

Nous savons que: * $U_n = (a - 0,6) \times (0,5)^{n-1}$ (d'après le cours)

$$* a_n = U_n + 0,6.$$

D'où: $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

3. c. c1. Déterminons la limite de la suite (a_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a - 0,6) \times (0,5)^{n-1} + 0,6$$

$$= 0,6 \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^{n-1} = 0, \text{ car: } 0,5 \in]0; 1[.$$

Au total: la limite de la suite (a_n) est égale à $0,6$.

3. c. c2. Cette limite dépend-elle de "a" ?

Non, cette limite ne dépend pas de la valeur de "a" car $0,5 \in]0; 1[$.

3. d. La publicité la plus vue ?

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$, cela signifie qu'au bout d'un très grand nombre de

parties, ce sont les parties A qui apparaîtront le plus souvent (60% des cas).

Donc la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo sera: la publicité A.