Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Partie Géométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UN PEU DE GÉOMÉTRIE ! 5

CORRECTION

1. Justifions que le triangle OAB est isocèle en O:

Le triangle OAB est isocèle en O lorsque la longueur du côté [OA] est égale à la longueur du côté [OB].

Or: • la longueur du côté [OA] est: $|z_A - z_O| = \sqrt{|(3)^2 + (c-9)|} = \sqrt{c}$

• la longueur du côté [OB] est: $|z_B - z_O| = \sqrt{|(3)^2 + (c-9)|} = \sqrt{c}$.

Ainsi, OA = OB et par conséquent: le triangle OAB est bien isocèle en O.

2. Démontrons qu'il existe une valeur du réel " c " pour laquelle le triangle OAB est rectangle, et donnons cette valeur:

Le triangle OAB isocèle en O est rectangle en O ssi l'angle en O vaut 90°.

Or: Le triangle OAB isocèle en O est rectangle en O ssi $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}$ est un imaginaire pur.

Ici: $$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{(3 - i\cdot\sqrt{c-9}) - 0}{(3 + i\cdot\sqrt{c-9}) - 0}$$

$$= \frac{(3 - i\cdot\sqrt{c-9})\,(3 + i\cdot\sqrt{c-9})}{c}$$

$$= \frac{9 - 6i \cdot \sqrt{c-9} - (c-9)}{c}$$

$$= \frac{18 - c}{c} + i \cdot \left(\frac{-6\sqrt{c-9}}{c} \right).$$

Dans ces conditions, $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}$ est un imaginaire pur ssi:

$$\frac{18 - c}{c} = 0 \quad \text{cad} \quad c = 18.$$

Ainsi, il existe bien une valeur du réel " c " pour laquelle le triangle OAB est rectangle: $c = 18$.