

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Nombres Complexes
Partie Géométrique



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UN PEU DE GÉOMÉTRIE !

1

CORRECTION

1. Le triangle CAB est-il rectangle isocèle en C ?

D'après le cours: un triangle CAB est rectangle et isocèle en C lorsque la longueur du côté [CA] est égale à la longueur du côté [CB], et que l'angle en C vaut 90° .

- Or:
- longueur du côté [CA] = longueur du côté [CB] ssi $|z_A - z_C| = |z_B - z_C|$,
 - le triangle CAB est rectangle en C ssi $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ est un imaginaire pur.

Ici:

- $|z_A - z_C| = |3 + 2i - 1 + 2i|$
 $= |2 + 4i|$
 $= \sqrt{(2)^2 + (4)^2}$
 $= \sqrt{20}$.

- $|z_B - z_C| = |-3 - 1 + 2i|$
 $= |-4 + 2i|$
 $= \sqrt{(-4)^2 + (2)^2}$
 $= \sqrt{20}$.

Donc nous avons bien: $|z_A - z_C| = |z_B - z_C|$.

$$\text{De plus: } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4 + 2i}{2 + 4i} = \frac{(-4 + 2i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)} = i.$$

Ainsi: $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ est un imaginaire pur.

Au total, toutes les conditions sont réunies: **le triangle CAB est donc rectangle et isocèle en C.**

2. Déterminons la nature du triangle ABC:

Pour cela nous allons calculer: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

D'après l'énoncé: $z_A = -2i$, $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_C = \sqrt{3} + i$.

$$\text{Dans ces conditions: } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i + 2i}{\sqrt{3} + i + 2i}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i}$$

$$= \frac{(-\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}{(\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}$$

$$= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12}$$

$$= \frac{1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Sous forme trigonométrique: $\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Or, d'après le cours, **le triangle est équilatéral direct** quand:

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 1 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Au total, la nature du triangle ABC est: **il s'agit d'un triangle équilatéral direct.**

3. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

D'après le cours, les droites (AB) et (CD) sont parallèles, ssi:

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Or ici: $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 - 3i$, $z_C = 2 + 5i$ et $z_D = -2 - 3i$.

Dans ces conditions: • $z_D - z_C = -2 - 3i - (2 + 5i) = -4 - 8i$,

$$\bullet z_B - z_A = -1 - 3i - (1 + i) = -2 - 4i.$$

Ainsi: $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-4 - 8i}{-2 - 4i}$ **cad** $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = 2 \in \mathbb{R}$.

Comme $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$, nous pouvons affirmer que: **les droites (AB) et (CD)**

sont bien parallèles.