

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Nombres Complexes
Partie Géométrique



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'ENSEMBLE DES POINTS M...

5

CORRECTION

Déterminons l'ensemble E des points M (z) tels que: $\left(\frac{z-i-1}{z+1}\right) \in \mathbb{R}^*$, avec $z \neq -1$.

- Pour tout $z \neq -1$ avec $z = x + iy$, nous avons:

$$\frac{z-i-1}{z+1} = \frac{x+iy-i-1}{x+iy+1}$$

$$= \frac{(x-1) + i(y-1)}{(x+1) + iy}$$

$$= \frac{[(x-1) + i(y-1)] \times [(x+1) - iy]}{[(x+1) + iy] \times [(x+1) - iy]}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - y - 1 + 2iy - ix - i}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 - y - 1)}{(x+1)^2 + y^2} + i \times \frac{(-x + 2y - 1)}{(x+1)^2 + y^2}, \text{ avec } z \neq -1.$$

- Or $\left(\frac{z-i-1}{z+1}\right) \in \mathbb{R}^*$ et $z \neq -1$.

D'où le système:

$$\begin{cases} z \neq -1 \\ -x + 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - y - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4}x^2 < \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ x^2 < \frac{3}{5} \end{cases}$$

- Au total, l'ensemble E des points $M(z)$ est:

$$E = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x + iy \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ x \in \left] -\sqrt{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}} \right[\end{cases} \right\}.$$