Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Partie Géométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'ENSEMBLE DES POINTS M... 4

CORRECTION

Déterminons l'ensemble E des points M (z) tels que: $\left(\frac{z - i - 1}{z + 1}\right) \in \mathbb{R}_+^*$, avec $z \neq -1$.

• Pour tout $z \neq -1$ avec $z = x + iy$, nous avons:

$$\frac{z - i - 1}{z + 1} = \frac{x + iy - i - 1}{x + iy + 1}$$

$$= \frac{(x - 1) + i\,(y - 1)}{(x + 1) + iy}$$

$$= \frac{[(x - 1) + i\,(y - 1)] \times [(x + 1) - iy]}{[(x + 1) + iy] \times [(x + 1) - iy]}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - y - 1 + 2iy - ix - i}{(x + 1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 - y - 1)}{(x + 1)^2 + y^2} + i \times \frac{(-x + 2y - 1)}{(x + 1)^2 + y^2}, \text{ avec } z \neq -1.$$

• Or $\left(\frac{z - i - 1}{z + 1}\right) \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \neq -1$.

D'où le système: $\begin{cases} z \neq -1 \\ \dfrac{-x+2y-1}{(x+1)^2+y^2} = 0 \\ \dfrac{x^2+y^2-y-1}{(x+1)^2+y^2} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq -1 \\ -x+2y-1 = 0 \\ x^2+y^2-y-1 > 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 > \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ x^2 + \left(\dfrac{1}{2}x\right)^2 > \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{4}x^2 > \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}. \\ x^2 > \frac{3}{5} \end{cases}$$

• Au total, l'ensemble E des points M (z) est:

$$E = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{cases} x + iy \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ x > \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ ou } x < -\sqrt{\frac{3}{5}}. \end{cases} \right\}.$$