Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LES POINTS INVARIANTS 2

CORRECTION

1. a. Calculons la longueur OA:

La longueur OA nous est donnée par: $|z_A - z_O|$.

Or: $|z_A - z_O| = |2 + 2i - 0| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$.

Ainsi la longueur OA est égale à: $2\sqrt{2}$.

1. b. Déduisons-en les longueurs OK et OH:

Comme la droite (OA) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en H et K avec OH < OK, les points O, H, A et K sont alignés dans cet ordre.

De plus, le rayon du cercle $\mathcal{C}$ étant égal à $R = 2$, nous en déduisons que: $OH = 2\sqrt{2} - 2$ et $OK = 2\sqrt{2} + 2$.

Ainsi, nous avons bien: $|z_H| = OH = 2\sqrt{2} - 2$ et $|z_K| = OK = 2\sqrt{2} + 2$.

2. Justifions que $z_K = (2\sqrt{2} + 2)\, e^{i\pi/4}$ et $z_H = (2\sqrt{2} - 2)\, e^{i\pi/4}$:

Une mesure de l'angle $(\vec{e_1}\,;\,\overrightarrow{OA})$ est: $\dfrac{\pi}{4}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OH}$ ne sont pas nuls.

Dans ces conditions: $(\vec{e_1}\,;\,\vec{OK}) = (\vec{e_1}\,;\,\vec{OH}) = (\vec{e_1}\,;\,\vec{OA}) = \frac{\pi}{4}\,[\,2\pi\,]$.

Soient θ_K l'argument de z_K et θ_H celui de z_H: $\theta_K = \theta_H = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

Connaissant $|\,z_H|$ et $|\,z_K|$; nous pouvons conclure que:

- $z_H = |z_H|\,e^{i\pi/4}$ cad • $z_H = (2\sqrt{2} - 2)\,e^{i\,\pi/4}$
- $z_K = |z_K|\,e^{i\pi/4}$ • $z_K = (2\sqrt{2} + 2)\,e^{i\,\pi/4}$.

3. a. **Déterminons f (B) et f (C):**

- $f\,(B) = f\,(2i) = -\,\frac{4}{2i} = 2i$.
- $f\,(C) = f\,(2) = -\,\frac{4}{2} = -\,2$.

Ainsi: $f\,(B) = 2i$ et $f\,(C) = -\,2$.

3. b. **Trouvons les points invariants de l'application f:**

Il s'agit ici de déterminer l'ensemble des points invariants par f.

Ils sont tels que: $z' = f\,(z) = z = -\,\frac{4}{z}$, avec $z \neq 0$

$\iff z^2 = -\,4$

$\iff z^2 = (2i)^2$

$\iff z = 2i$ ou $z = -\,2i$.

Ainsi, les points invariants sont: B $(2i)$ et B' $(-\,2i)$.