Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Algébrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉEL OU IMAGINAIRE PUR ? 3

CORRECTION

Montrons que $\frac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur, avec $x^2 + y^2 = 1$:

Soit $z = x + iy$, la forme algébrique d'un nombre complexe:

- $x =$ la partie réelle de z, notée Re (z)
- $y =$ la partie imaginaire de z, notée Im (z)
- z est un nombre réel quand $y = 0$
- z est un imaginaire pur quand $x = 0$.

Ici: $\frac{z+1}{z-1} = \frac{x+iy+1}{x+iy-1}$

$$= \frac{(x+1)+iy}{((x-1)+iy)}$$

$$= \frac{[(x+1)+iy] \times [(x-1)-iy]}{(x-1)^2+(y)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1) - iy(x+1) + iy(x-1) - i^2 y^2}{(x-1)^2+(y)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1 - iy\,(x+1) + iy\,(x-1) + y^2}{(x-1)^2 + (y)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2) - 1 - 2iy}{x^2 + 1 - 2x + y^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 - 1) - 2iy}{(x^2 + y^2) + 1 - 2x}.$$

Or: $x^2 + y^2 = 1.$

D'où: $\frac{z+1}{z-1} = \frac{(1-1) - 2iy}{1 + 1 - 2x}$

$$= \frac{-iy}{1-x}, \text{ avec } x \neq 1.$$

Conclusion:
- $\frac{z+1}{z-1}$ est bien un imaginaire pur,
- $Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0.$