

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. a. a1. Donnons la forme trigonométrique et la forme exponentielle de "j" :

D'après l'énoncé: $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Le module de j est: $|j| = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| \Rightarrow |j| = 1$.

- Soit θ , l'argument de j:

$$j = 1 (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= 1 \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Au total: • L'argument et le module de j sont:

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ et } |j| = 1.$$

- Sous forme trigonométrique j s'écrit: $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

- Sous forme exponentielle j s'écrit: $j = 1 \times e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. a. a2. Dédudions-en les formes algébriques et exponentielles de a' , b' et c' :

- D'après l'énoncé:
 - $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$,
 - $a' = ja$, $b' = jb$ et $c' = jc$,
 - $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$.

Dans ces conditions:

- $a' = -4 \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow a' = 2 - i(2\sqrt{3})$,
- $b' = 2 \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b' = -1 + i\sqrt{3}$,
- $c' = 4 \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow c' = -2 + i(2\sqrt{3})$.

Ainsi les formes algébriques de a' , b' et c' sont respectivement:

$$a' = 2 - i(2\sqrt{3}), \quad b' = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c' = -2 + i(2\sqrt{3}).$$

- Sous forme exponentielle a , b et c s'écrivent:
 - $a = -4 \Rightarrow a = 4e^{i\pi}$,
 - $b = 2 \Rightarrow b = 2e^{ix0}$,
 - $c = 4 \Rightarrow c = 4e^{ix0}$.

Dans ces conditions, sous forme exponentielle a' , b' , et c' s'écrivent:

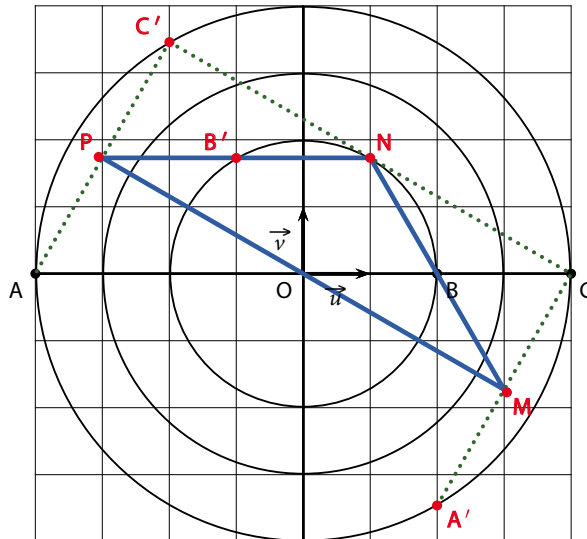
- $a' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 4e^{i\pi} \Rightarrow a' = 4e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$,
- $b' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{ix0} \Rightarrow b' = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$,
- $c' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 4e^{ix0} \Rightarrow c' = 4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.

Au total les formes exponentielles de a' , b' et c' sont respectivement:

$$a' = 4 e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}, \quad b' = 2 e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \quad \text{et} \quad c' = 4 e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

1. b. Plaçons les points A' , B' et C' sur le graphique:

Voici le graphique de l'Annexe sur lequel figurent les points A' , B' et C' :



2. Montrons que les points A' , B' et C' sont alignés:

Les points A' , B' et C' sont alignés ssi: $\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} \in \mathbb{R}$.

Or ici: • $z_{A'} = a' = j \cdot a$, avec: $a = -4$,

• $z_{B'} = b' = j \cdot b$, avec: $b = 2$,

• $z_{C'} = c' = j \cdot c$, avec: $c = 4$.

Dans ces conditions: $\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \frac{4j + 4j}{2j + 4j} = \frac{8}{6} \in \mathbb{R}$.

Ainsi comme $\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} \in \mathbb{R}$, nous pouvons affirmer que:

les points A' , B' et C' sont bien alignés.

3. Démontrons que le triangle MNP est isocèle:

- D'après l'énoncé:
- M est le milieu du segment $[A'C]$,
 - N est le milieu du segment $[C'C]$,
 - P est le milieu du segment $[C'A]$.

Dans ces conditions, les affixes des points M, N et P sont:

• Pour M: $z_M = \frac{a' + c}{2} \Rightarrow z_M = 2 + 2 e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = 3 - i\sqrt{3},$

• Pour N: $z_N = \frac{c' + c}{2} \Rightarrow z_N = 2 + 2 e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 1 + i\sqrt{3},$

• Pour P: $z_P = \frac{c' + a}{2} \Rightarrow z_P = -2 + 2 e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -3 + i\sqrt{3}.$

Or, d'après le cours, le triangle MNP est isocèle en N ssi: $NM = NP.$

Ici: • $NM = |z_M - z_N| \Rightarrow NM = 4,$

• $NP = |z_P - z_N| \Rightarrow NP = 4.$

Au total: le triangle MNP est bien isocèle en N.