Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 6

ÉNONCÉ

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n: $z_{n+1} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. a. Vérifier que: $\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

   b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur.

   c. Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n:

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\left(\frac{n\pi}{6}\right)}.$$

   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

   Déterminer la nature et la limite de la suite (U_n).

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel k : $\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} i$.

En déduire l'égalité : $A_k A_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on appelle (L_n) la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$.

On a ainsi : $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$.

Démontrer que la suite (L_n) est convergente et calculer sa limite.