Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 5

CORRECTION

1. a. Déterminons la forme algébrique de l'affixe du point A':

Nous savons que: $f(z) = z'$, avec $z' = -\frac{1}{z}$.

Ici: $A(z_A)$ avec $z_A = -1 + i$.

Dans ces conditions: $f(z_A) = z_A'$

$$\iff f(z_A) = \frac{-1}{z_A}$$

$$\iff f(z_A) = \frac{-1}{-1+i}$$

$$\iff f(z_A) = \frac{-(1+i)}{(-1+i)(1+i)}$$

$$\iff f(z_A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Ainsi, la forme algébrique de l'affixe du point A' est: $z_A' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$

1. b. Déterminons la forme exponentielle de l'affixe du point B':

Nous savons que: $f(z) = z'$, avec $z' = -\frac{1}{z}$.

Ici: $B(z_B)$ avec $z_B = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Dans ces conditions: $f(z_B) = z_B'$

$$\iff f(z_B) = \frac{-1}{z_B}$$

$$\iff f(z_B) = \frac{-1}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\iff f(z_B) = -2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\iff f(z_B) = 2 \times e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

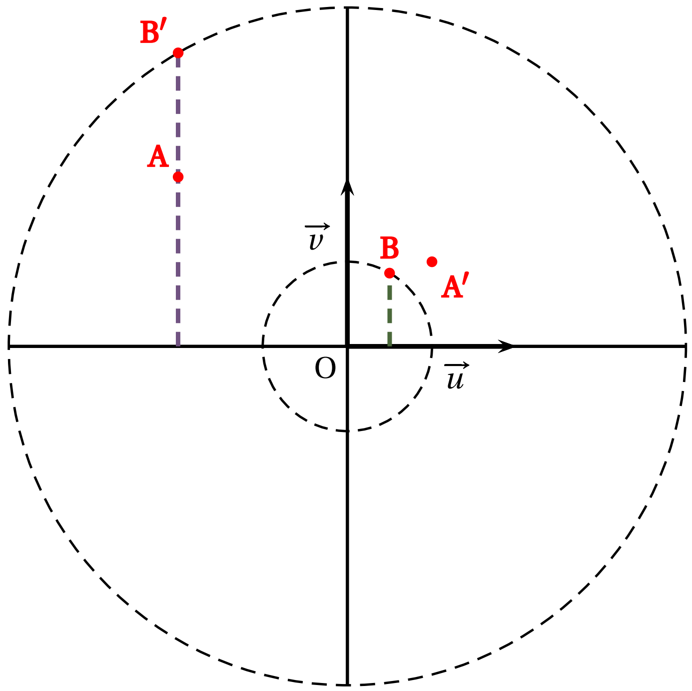
$$\iff f(z_B) = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Ainsi, la forme exponentielle de l'affixe du point B' est: $z_B' = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. c. Représentation graphique dans le repère orthonormé direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$:

Nous avons le graphique suivant avec:

$$A(-1+i),\ B\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right),\ A'\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) \text{ et } B'\left(2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\right).$$



2. a. Montrons que $z' = \frac{1}{r} e^{i(\pi - \theta)}$:

Nous savons que: $f(z) = z'$, avec $z' = -\frac{1}{z}$.

Ici: $z = r\, e^{i\theta}$.

Dans ces conditions: $f(z) = z'$

$$\iff f(z) = \frac{-1}{z}$$

$$\iff f(z) = \frac{-1}{r\, e^{i\theta}}$$

$$\iff f(z) = -\frac{1}{r} \times e^{-i\theta}$$

$$\iff f(z) = \frac{1}{r} \times e^{i\pi} \times e^{-i\theta}$$

$$\iff f(z) = z' = \frac{1}{r}\, e^{i(\pi - \theta)}.$$

Au total, nous avons bien: $z' = \frac{1}{r}\, e^{i(\pi - \theta)}$.

2. b. Est-ce vrai ? Justifions:

Si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors nous pouvons écrire:

$OM < 1 \iff |z| < 1$

$$\iff \frac{1}{|z|} > 1$$

$$\iff \left|\frac{1}{z}\right| > 1$$

$$\iff \left| -\frac{1}{z} \right| > 1$$

$$\iff |z'| > 1 \text{ cad: } OM' > 1.$$

$(M(z)$ et $M'(z'))$

Au total, nous venons de justifier que c'est: vrai.

3. a. Montrons qu'une équation cartésienne du cercle est $x^2 + x + y^2 = 0$:

D'après le cours, nous savons qu'une équation cartésienne d'un cercle de centre $K\left(z_K = -\frac{1}{2}\right)$ ou $K\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$ et de rayon $R = \frac{1}{2}$ s'écrit:

$$(x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = R^2 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\iff x^2 + \frac{1}{4} + x + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\iff x^2 + x + y^2 = 0.$$

Ainsi, une équation cartésienne du cercle est bien: $x^2 + x + y^2 = 0$.

3. b. Déterminons la forme algébrique de z' sachant que $z = x + iy$:

Ici: $z' = -\frac{1}{z}$, avec $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$.

D'où: $z' = \dfrac{-1}{x + iy}$

$$= \frac{-(x - iy)}{x^2 + y^2}$$

$$= \left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) + i \times \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Ainsi, algébriquement z' s'écrit: $z' = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) + i \times \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$.

3. c. Montrons que M' appartient à la droite d'équation $x = 1$:

D'après la question précédente, la partie réelle de z' cad l'abscisse de M' est:

$$\frac{-x}{x^2+y^2}, \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}^* \text{ et } y \in \mathbb{R}^*.$$

Or le point M (x, y), distinct de O, appartient au cercle de centre K $\left(z_K = -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{1}{2}$.

D'où nous avons: $x^2 + x + y^2 = 0$ **cad**: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = -x}$.

Dans ces conditions: $\frac{-x}{x^2+y^2} = \frac{-x}{-x}$

$$= 1.$$

Ainsi, l'abscisse du point M' est égale à 1.

Au total: M' appartient donc bien à la droite d'équation $x = 1$.