Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 4

CORRECTION

Partie A: Étude d'exemples

1. a. Donnons la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$:

Ici: $z = i$.

Dans ces conditions: • $z^2 = -1$,

• $\frac{1}{z} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i \times i}$ cad: $\frac{1}{z} = -i$.

Ainsi: $z^2 = -1$ et $\frac{1}{z} = -i$.

1. b. Plaçons les points $N_1(-1)$ et $P_1(-i)$ sur le graphique:

Nous avons le graphique suivant avec: $A(1)$, $N_1(-1)$ et $P_1(-i)$.

Nous remarquons que les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

Graphique à la fin du corrigé!

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$:

Soit l'équation: $z^2 + z + 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1$ cad: $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2 < 0$.

D'où deux solutions dans $\mathbb{C}$:
- $z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$,
- $z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.

Au total, l'équation $z^2 + z + 1$ admet 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

3. a. Déterminons la forme exponentielle de z, z^2 et $\dfrac{1}{z}$:

Ici: $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- La forme exponentielle de z:

- Le module de z est: $\left| -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$.

- Soit θ l'argument de z:

$$z = 1 \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 1 \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi: $z = 1 \times e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

- La forme algébrique de z^2:

$$z^2 = \left(1 \times e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2.$$

D'où: $z^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Ainsi: $z^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

- La forme algébrique de $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}.$$

D'où: $\frac{1}{z} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Ainsi: $\frac{1}{z} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

3\. b. Plaçons les points N_2 (z^2) et P_2 $\left(\frac{1}{z}\right)$ sur le graphique:

Nous avons le graphique suivant avec: $N_2\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$ et $P_2\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

Nous remarquons que les points A, N_2 et P_2 sont alignés: normal car N_2 et P_2 sont confondus !

Graphique à la fin du corrigé !

Partie B:

1. Etablissons que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right)$:

Développons: $(z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right)$.

$$(z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = z^2 - z + z - 1 + 1 - \frac{1}{z}$$

$$= z^2 - \frac{1}{z}.$$

D'où pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, nous avons bien: $(z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = z^2 - \frac{1}{z}$.

2. Déduisons-en que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, les points A, N et P sont alignés ssi $z^2 + z + 1$ est un réel:

Pour tout $z \neq 0$, les points A, N et P sont alignés ssi:

les vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PA}$ sont colinéaires.

Ici:
- $\overrightarrow{PN}$ a pour affixe: $z^2 - \frac{1}{z}$,
- $\overrightarrow{PA}$ a pour affixe: $1 - \frac{1}{z}$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PA}$ sont colinéaires ssi il existe un nombre réel k tel que:

$$\overrightarrow{PN} = k \cdot \overrightarrow{PA}.$$

Or: $z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right)$

<=> $\overrightarrow{PN} = (z^2 + z + 1)\,\overrightarrow{PA}$

<=> $\overrightarrow{PN} = k \cdot \overrightarrow{PA}$, avec: $k = (z^2 + z + 1)$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PA}$ sont colinéaires ssi: **$k \in \mathbb{R}$.**

Ainsi: les points A, N et P sont alignés ssi $k = z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$.

3. Justifions que $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i\,(2xy + y)$:

Ici: $z = x + iy$.

D'où: $z^2 + z + 1 = (x + iy)^2 + (x + iy) + 1$

$$= x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 1$$

$$= x^2 - y^2 + x + 1 + i\,(2xy + y).$$

Au total, nous avons bien: $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i\,(2xy + y)$.

4. a. Déterminons l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés:

Les points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés vérifient le système: $\begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = X,\ X \in \mathbb{R} \\ 2xy + y = 0 \end{cases}$ **car: $z^2 + z + 1$ est un réel**

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = X \\ y\,(2x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Au total, l'ensemble des points M demandé est: l'ensemble des points d'abscisse égale à $-\frac{1}{2}$ ou d'ordonnée égale à 0, privé du point O $(0\,;\,0)$.

4. b. Traçons cet ensemble de points sur le graphique:

L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés est représenté sur le graphique suivant: