

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes

## Terminale

Nombres Complexes  
Exercice de Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

1. L'affirmation 1 est: **Vraie.**

En effet, dans un premier temps déterminons les affixes des points A, B et O.

Soit l'équation (E):  $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ .

$$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 \text{ cad: } \Delta = -4 = (2i)^2 < 0.$$

D'où deux solutions dans  $\mathbb{C}$ :  $\bullet z_A = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} \text{ cad: } z_A = \sqrt{3} - i,$

$$\bullet z_B = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} \text{ cad: } z_B = \sqrt{3} + i.$$

Ainsi les affixes respectifs des points A, B et O sont:

- A ( $z_A$ ), avec:  $z_A = \sqrt{3} - i,$
- B ( $z_B$ ), avec:  $z_B = \sqrt{3} + i,$
- O ( $z_0$ ), avec:  $z_0 = 0.$

Dans un second temps, nous savons que le triangle OAB est équilatéral ssi:

$$\frac{z_B - z_0}{z_A - z_0} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Or ici:  $\frac{z_B - z_0}{z_A - z_0} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$

$$= \frac{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
&= 1 \times \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

**Au total:** comme  $\frac{z_B - z_0}{z_A - z_0} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ , le triangle OAB est équilatéral.

2. L'affirmation 2 est: **Fausse.**

En effet, soit  $X = U^{2019} + \bar{U}^{2019}$ , avec:  $U = \sqrt{3} + i$ .

$$\begin{aligned}
X &= (\sqrt{3} + i)^{2019} + (\sqrt{3} - i)^{2019} \\
&= 2^{2019} \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)^{2019} + 2^{2019} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)^{2019} \\
&= 2^{2019} \left( \cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2019\pi}{6}\right) \right) \\
&\quad + 2^{2019} \left( \cos\left(-\frac{2019\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{2019\pi}{6}\right) \right).
\end{aligned}$$

Or:  $2019 = 2016 + 3$  et  $2016 = 336 \times 6$ .

$$\begin{aligned}
\text{D'où: } X &= 2^{2019} \left( \cos\left[\left(336 + \frac{1}{2}\right)\pi\right] + i \sin\left[\left(336 + \frac{1}{2}\right)\pi\right] \right) + \\
&\quad 2^{2019} \left( \cos\left[-\left(336 + \frac{1}{2}\right)\pi\right] + i \sin\left[-\left(336 + \frac{1}{2}\right)\pi\right] \right).
\end{aligned}$$

Comme: •  $\sin(-x) = -\sin x$

•  $\cos(-x) = \cos x$

$$\bullet \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x,$$

$$X = 2 \times 2^{2019} \cos\left[\frac{\pi}{2} + 336\pi\right]$$

$$= 2^{2020} \times [-\sin(336\pi)]$$

$$= 0, \text{ car: } \sin(336\pi) \neq 0.$$

$$\text{Au total: } U^{2019} + \bar{U}^{2019} = 0 \neq 2^{2019}.$$

3. L'affirmation 3 est: **Vraie.**

En effet, soit la fonction  $f_n$  définie sur  $[0; +\infty[$  par:  $f_n(x) = x e^{-nx+1}$ .

[u x v]

$f_n$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et:  $f'_n(x) = (1 \times e^{-nx+1}) + (x \times (-n) e^{-nx+1})$

[u' x v + u x v']

$$\text{cad: } f'_n(x) = e^{-nx+1} \times (1 - nx).$$

Dans ces conditions:  $f'_n(x) = 0$  ssi  $1 - nx = 0$  cad:  $x = \frac{1}{n}$ , car  $e^{-nx+1} > 0$ .

Notons que:  $\bullet f_n$  est croissante sur  $\left[0; \frac{1}{n}\right]$ ,

$\bullet f_n$  est décroissante sur  $\left[\frac{1}{n}; +\infty\right[$ .

D'où: le point  $A\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$  est bien un maximum pour  $f_n$  sur  $[0; +\infty[$ .

**Au total:** pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , la fonction  $f_n$  admet bien un maximum.

4. L'affirmation 4 est: **Vraie.**

En effet, d'après le cours une courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote en  $+\infty$  ssi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Or ici: pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos(x) e^{-x}$ .

De plus nous avons:  $\cos(x) \in [-1; 1]$  et donc:  $-1 \leq \cos(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Dans ces conditions:  $-1 \times e^{-x} \leq \cos(x) e^{-x} \leq 1 \times e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{e^x} \leq f(x) \leq \frac{1}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Et: •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0,$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

D'où, d'après le théorème des gendarmes nous pouvons affirmer que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

**Au total:** la courbe  $\mathcal{C}$  admet bien une asymptote en  $+\infty$ .

5. L'affirmation 5 est: **Fausse.**

En effet, si la variable  $I$  contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme, nous avons: •  $2^{14} \leq A$

•  $A \leq 2^{15}$

D'où:  $2^{14} \leq A \leq 2^{15} \Leftrightarrow 14 \ln(2) \leq \ln(A) \leq 15 \ln(2).$

**Au total:** nous avons  $14 \ln(2) \leq \ln(A) \leq 15 \ln(2)$  et non pas

$$15 \ln(2) \leq \ln(A) \leq 16 \ln(2).$$