

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautilus à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

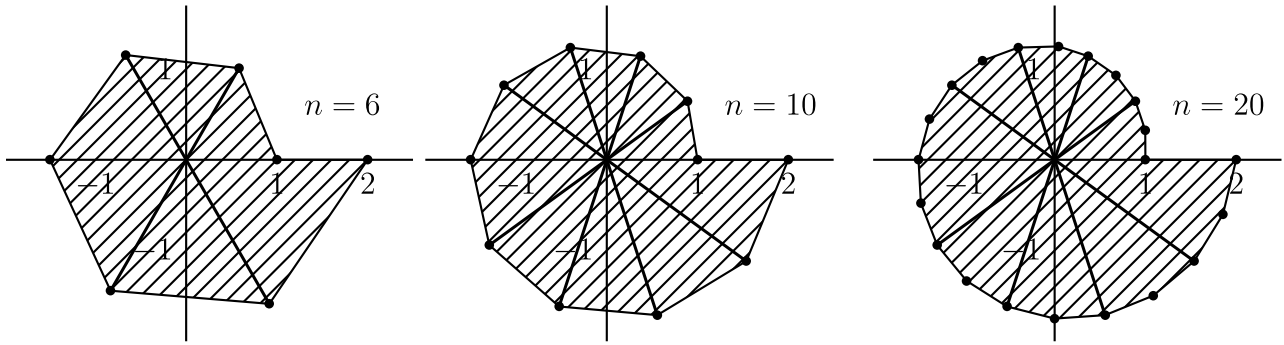
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n ,

on définit les nombres complexes $z_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k .



Dans ce modèle, le pourtour du nautilus est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leq k \leq n$.

Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A – Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$.

Ainsi, pour $0 \leq k \leq 6$, on a: $z_k = \left(1 + \frac{k}{6}\right) e^{i \frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 .
2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.
3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 , puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B – Ligne brisée formée à partir de $n + 1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer la longueur OM_k .
2. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$, déterminer une mesure des angles $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_k})$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_{k+1}})$. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k}; \overrightarrow{OM_{k+1}})$.

3. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle $OM_k M_{k+1}$ est égale à $\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.