Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 25

CORRECTION

Partie A – Ligne brisée formée à partir de sept points

1. Déterminons la forme algébrique de z_1:

Ici $n = 6$ et pour tout $k \in [\![0 ; 6]\!]$: $z_k = \left(1 + \frac{k}{6}\right) e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

D'où: $z_1 = \left(1 + \frac{1}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{3}}$ cad $z_1 = \frac{7}{6} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $z_1 = \frac{7}{6}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$<=> \quad z_1 = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$<=> \quad z_1 = \frac{7}{12} + \left(\frac{7\sqrt{3}}{12}\right) i.$$

Au total, sous forme algébrique: $z_1 = \frac{7}{12} + \left(\frac{7\sqrt{3}}{12}\right) i.$

2. Vérifions que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera:

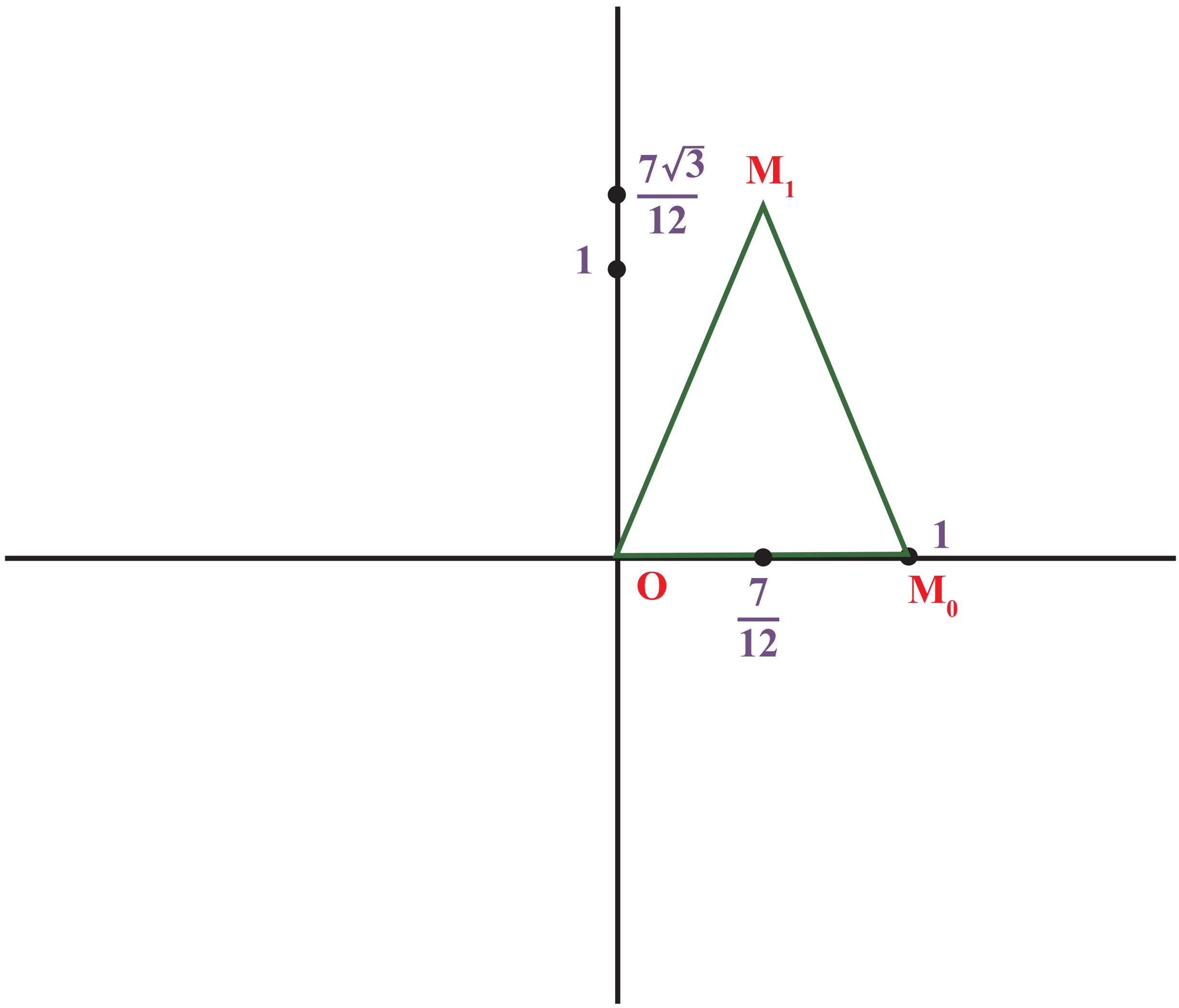
- $z_0 = \left(1 + \frac{0}{6}\right) e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{6}}$ cad $z_0 = 1.$

• $z_6 = \left(1 + \frac{6}{6}\right) e^{i\frac{2\times 6\times \pi}{6}}$ cad $z_6 = 2$.

Au total, z_0 et z_6 sont bien des entiers avec: $z_0 = 1$ et $z_6 = 2$.

3. a. Calculons la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1:

Étape 1: Représentation graphique du triangle OM_0M_1.



Étape 2: Réponse à la question posée.

Grâce au graphique, nous pouvons dire que la hauteur, issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1, a pour longueur la partie imaginaire de M_1 (z_1): $H = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.

Au total: $H = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.

3. b. Établissons que l'aire du triangle $OM_0M_1 = H = \frac{7\sqrt{3}}{24}$:

L'aire d'un triangle est: $\mathcal{A} = \frac{\text{Base du triangle x Hauteur}}{2}$.

Ici, nous avons donc: $\mathcal{A} = \frac{1 \times \left(\frac{7\sqrt{3}}{12}\right)}{2}$ cad $\mathcal{A} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Au total: $\mathcal{A} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B – Ligne brisée formée à partir de n + 1 points

1. Déterminons la longueur OM_K:

La longueur OM_K est: $|z_K - 0|$, avec $M_K\ (z_K)$ et $O\ (0)$.

Or: $z_K = \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Dans ces conditions: $|z_K| = 1 + \frac{k}{n}$, avec $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

Au total, la longueur OM_K est: $1 + \frac{k}{n}$.

2. a. Déterminons une mesure de l'angle $(\vec{u}\,; \overrightarrow{OM_K})$:

Une mesure de l'angle $(\vec{u}\,; \overrightarrow{OM_K})$ est: $\arg(z_K)$.

Or: $\arg(z_K) = \frac{2k\pi}{n}$.

Au total, une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\,OM_K)$ est:

$$\frac{2k\pi}{n}, \text{ avec } n \geqslant 2 \text{ et } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

2. b. Déterminons une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_{K+1}})$:

Une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_{K+1}})$ est: $\arg(z_{K+1})$.

Or: $z_{K+1} = \left(1 + \dfrac{(k+1)}{n}\right) e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}$.

D'où: $\arg(z_{K+1}) = \dfrac{2(k+1)\pi}{n}$.

Au total, une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_{K+1}})$ est:

$$\frac{2(k+1)\pi}{n}, \text{ avec } n \geqslant 2 \text{ et } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

2. c. Déduisons-en une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_K}\,;\,\overrightarrow{OM_{K+1}})$:

Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_K}\,;\,\overrightarrow{OM_{K+1}})$ est: $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_{K+1}}) - (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_K})\;[2\pi]$.

D'où: $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_{K+1}}) - (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_K}) = \dfrac{2(k+1)\pi}{n} - \dfrac{2k\pi}{n}\;[2\pi]$

cad: $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_{K+1}}) - (\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_K}) = \dfrac{2\pi}{n}\;[2\pi]$.

Au total, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_K}\,;\,\overrightarrow{OM_{K+1}})$ est: $\dfrac{2\pi}{n}\;[2\pi]$.

3. Démontrons que la longueur de la hauteur issue de M_{K+1} dans le triangle OM_KM_{K+1} est $\left(1 + \dfrac{(k+1)}{n}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$:

Soit H_{k+1} le pied de la hauteur de longueur h_{k+1} issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}.

Dans ces conditions, $OH_{k+1}M_{k+1}$ est un triangle rectangle en H_{k+1}.

Ainsi: $\dfrac{H_{k+1}M_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin(\overrightarrow{OH_{k+1}}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}})$

$$\Leftrightarrow \frac{H_{k+1}M_{k+1}}{OM_{k+1}} = \frac{h_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin(\overrightarrow{OH_{k+1}}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}}). \quad \textbf{(a)}$$

Or, nous savons que:

- $(\overrightarrow{OH_{k+1}}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}}) = (\overrightarrow{OM_k}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}})$

  $= \dfrac{2\pi}{n}\,[2\pi]$;

- $OM_{k+1} = 1 + \dfrac{(k+1)}{n}$.

D'où: **(a)** $\Rightarrow h_{k+1} = OM_{k+1} \times \sin(\overrightarrow{OH_{k+1}}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}})$

$\Rightarrow h_{k+1} = OM_{k+1} \times \sin(\overrightarrow{OM_k}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}})$

$$\Rightarrow h_{k+1} = \left[1 + \frac{(k+1)}{n}\right] \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Au total, on a bien: $h_{k+1} = \left[1 + \dfrac{(k+1)}{n}\right] \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.