# Maths Expertes
## Terminale

# Nombres Complexes
# Exercice de Synthèse

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 24

## CORRECTION

**1. Calculons BJ et déduisons-en BK:**

D'après l'énoncé: • $B\ (z_B)$ avec $z_B = -1$,

• $J\ (z_J)$ avec $z_J = \frac{1}{2}\, i$.

• **Étape 1:**

**L'équation d'un cercle de centre A (a, b) et de rayon R est:**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Ici: le centre est $J\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et le rayon est $R = \frac{1}{2}$.

Donc $\mathscr{C}$ est un cercle d'équation: $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

• **Étape 2:**

$B\ (-1, 0)$ et $J\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Or, l'équation du segment [BJ] est de la forme: $y = ax + b$. **(1)**

Comme B et J appartiennent au segment [BJ], nous avons le système suivant:

$$(1) \iff \begin{cases} 0 = -a + b \\ \frac{1}{2} = b \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Le segment [BJ] a donc pour équation: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

• **Étape 3**: **Calcul de BJ.**

$BJ = |z_J - z_B| \iff BJ = \left| \frac{1}{2} i + 1 \right|$ **cad** $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

• **Étape 4**: **Calcul de BK.**

Le point K vérifie le système:

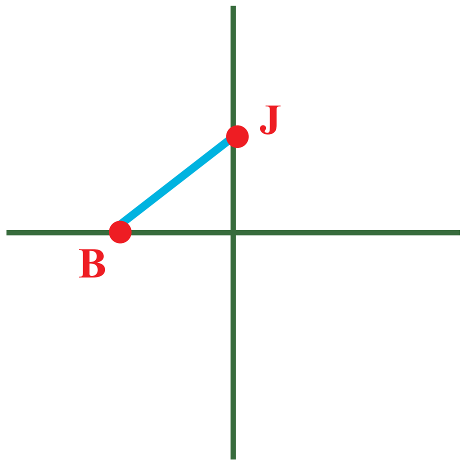
$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4} \\ y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \text{ ou } y = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

D'où 2 solutions: $U_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)$ et $U_2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)$.

Nous retiendrons la solution $U_1$ car graphiquement nous voyons que le point K a un abscisse et une ordonnée forcément négatifs.




Au total: • $K(z_K)$ avec $z_K = -\frac{\sqrt{5}}{5} + i\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)$,

• $BK = |z_K - z_B|$ cad $BK = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.



2. a. Donnons la forme exponentielle de l'affixe $z_2$ de $A_2$:

• Le module de $z_2$ est: $|z_2| = 1$.

En effet, d'après l'énoncé: • $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$

• les 5 côtés ont la même longueur.

Donc: $\overrightarrow{OA_2} = \vec{u}$, avec $= |\vec{u}| = 1$.

• L'argument de $z_2$ est: $\theta = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}$ cad $\theta = \frac{4\pi}{5}\ [2\pi]$.

Sous forme exponentielle $z_2$ s'écrit: $z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

**2. b. Démontrons que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$:**

$$BA_2{}^2 = |z_2 - z_B|^2 \iff BA_2{}^2 = \left(\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2\right)$$

$$\iff BA_2{}^2 = \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\iff BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

Au total: $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

**2. c. Déduisons-en que $BA_2 = BK$:**

D'après le logiciel:
- $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(-\sqrt{5} - 1)$,
- $\left(\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(-\sqrt{5} - 1)$.

Or: $BA_2 = \left(2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \iff BA_2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\iff BA_2 = \left(\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\iff BA_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Au total: $BA_2 = BK = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

3. Construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier:

Nous obtenons le graphique suivant: