

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. a. Montrons que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times U_n$:

Nous avons: • $z_0 = 0$

$$\bullet z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5$$

$$\bullet z_A = 4 + 2i \text{ et } A(z_A)$$

$$\bullet U_n = z_n - z_A$$

$$\bullet U_{n+1} = z_{n+1} - z_A \iff U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 - 4 - 2i$$

$$\iff U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 1 - 2i.$$

$$\bullet \frac{1}{2} i \times U_n = \frac{1}{2} i \times (z_n - z_A) \iff \frac{1}{2} i \times U_n = \frac{1}{2} i \times (z_n - 4 - 2i)$$

$$\iff \frac{1}{2} i \times U_n = \frac{1}{2} i \times z_n + 1 - 2i.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times U_n$.

Ainsi: (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ et de premier terme $U_0 = -4 - 2i$, cad $U_0 = -4 - 2i$.

1. b. Démontrons que, pour tout entier naturel n , $U_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$:

Comme (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ et de premier terme $U_0 = -4 - 2i$, nous pouvons écrire:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}i \times U_n \text{ ou } U_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n U_0 \text{ ou } U_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i).$$

2. Démontrons que les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés:

Les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés ssi: $\frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} \in \mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n , nous avons:

$$\frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = \frac{U_n}{U_{n+4}} \Leftrightarrow \frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = \frac{\left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)}{\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4} (-4 - 2i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = 16 \in \mathbb{R}.$$

Au total: les points A , M_n et M_{n+4} sont bien alignés.