Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 22

CORRECTION

1. Justifions que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le rayon et le centre:

L'équation d'un cercle de centre A (a, b) et de rayon R est:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M (z) du plan avec: $|z - 2| = 1$.

$|z - 2| = 1 \iff |x + iy - 2| = 1$

$\iff |(x - 2) + iy| = 1$

$\iff (x - 2)^2 + y^2 = 1^2$

$\iff (x^2 - 2)^2 + y^2 = R^2.$

Au total: $\mathcal{C}$ est bien un cercle de rayon $R = 1$ et de centre A $(2 ; 0)$.

2. Déterminons le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, en fonction des valeurs du réel " a ":

Les points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vérifient le système:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ y = a\,x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (ax)^2 = 1 \\ y = a\,x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a^2+1)\,x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = ax \end{cases}.$$

Soit l'équation: $(a^2+1)\,x^2 - 4x + 3 = 0$.

$\Delta = 16 - 12\,(a^2+1) \Rightarrow \Delta = 4 - 12\,a^2$.

Distinguons 3 cas:

• $\Delta = 0$:

$\Delta = 0 \Longleftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow a = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Dans ce cas, l'équation admet une solution unique:

$$x = \frac{4}{2\left(\frac{1}{3}+1\right)} \quad \text{cad} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Il y a aura donc 2 points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$:

$$U\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) \text{ et } V\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right),$$

cad: $U\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $V\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

• $\Delta < 0$:

Dans ce cas, l'équation n'admet aucune solution.

D'où: aucun point d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

• $\Delta > 0$:

$\Delta > 0 \iff a \in \left] -\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[$.

Dans ce cas, l'équation admet deux solutions distinctes:

$$x' = \frac{4 - \sqrt{\Delta}}{2\,(a^2 + 1)} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{4 + \sqrt{\Delta}}{2\,(a^2 + 1)}.$$

Il y aura donc 2 points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$:

$$R\,(x' ; a\,x') \text{ et } T\,(x'' ; a\,x'').$$