Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 21

CORRECTION

1. Écrivons le nombre $1 + i$ sous forme exponentielle:

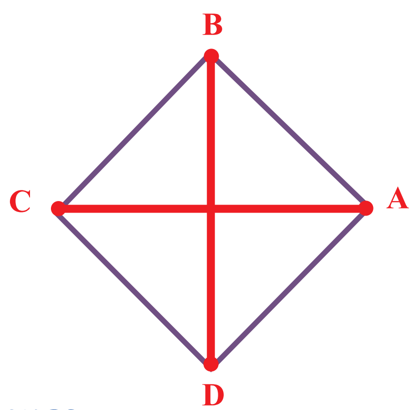
- Le module de $1 + i$ est: $|1 + i| = \sqrt{2}$.
- Soit θ, l'argument de $1 + i$: $1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Par identification: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Au total, sous forme exponentielle: $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. Montrons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD:

Notons que la distance maximale entre le centre O et les côtés du cube est: 4.



En effet: la longueur OA = la longueur OB

= la longueur OC

= la longueur OD

= 4.

Ainsi, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD ssi: $OM_n > 4$.

$OM_n > 4 \iff |z_n| > 4 \iff |(1+i)^n| > 4 \iff (\sqrt{2})^n > 4$.

Or: $(\sqrt{2})^n > 4 \iff (\sqrt{2})^n > (\sqrt{2})^4 \Rightarrow n > 4$.

Au total, il existe bien un entier naturel $n_0 = 5$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.