Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 2

CORRECTION

1. **L'affirmation 1 est:** **Fausse.**

En effet, ici: $c = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Dans ces conditions: $c = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\iff c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\iff c = \frac{1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{4}$ **cad:** $c = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})$.

Au total: $c = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3}) \neq \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})$.

2. **L'affirmation 2 est:** **Vraie.**

En effet, ici: $c = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Dans ces conditions: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c^{3n} = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n}$

$\iff c^{3n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \times e^{i\left(\frac{3n\pi}{3}\right)}$

(d'après la formule de Moivre)

$\iff c^{3n} = \frac{1}{8^n} \times e^{in\pi}$ **cad:** $c^{3n} = \frac{1}{8^n} \times (-1)^n$.

Au total: $c^{3n} = (-1)^n \times \frac{1}{8^n} \in \mathbb{R}$.

3. L'affirmation 3 est: **Vraie**.

En effet, ici les points O, S et T ont pour affixes respectifs:

- O: $z' = 0$,
- S: $z'' = c^2 = \frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{3}}$,
- T: $z''' = \frac{1}{c} = 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Or, d'après le cours, les points A, B et C sont alignés ssi: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Ici nous avons: $\frac{z'' - z'}{z''' - z'} = \frac{\frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{3}} - 0}{2\, e^{-i\frac{\pi}{3}} - 0}$

$$= \frac{1}{8} e^{i\frac{2\pi}{3} + i\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{8} e^{i\pi} \in \mathbb{R} \text{ car: } e^{i\pi} = -1.$$

Au total: $\frac{z'' - z'}{z''' - z'} = -\frac{1}{8} \in \mathbb{R}$, **donc les points O, S et T sont bien alignés**.

4. L'affirmation 4 est: **Vraie**.

En effet, soit $X = |c| + |c^2| + \ldots + |c^n|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$X = |c| + |c|^2 + \ldots + |c|^n$

$= \frac{1 - |c|^{(n+1)}}{1 - |c|} - 1$, car: $1 + q + q^2 \ldots + q^n = \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$

$$= \frac{1 - |c|^{(n+1)} - 1 + |c|}{1 - |c|}$$

$$= \frac{|c| - |c|^{(n+1)}}{1 - |c|}.$$

Or: $|c| = \frac{1}{2}$.

D'où: $X = \dfrac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$ cad: $X = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au total: $|c| + |c^2| + \ldots + |c^n| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.