Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 18

CORRECTION

Partie A

1. Exprimons l'affixe du point R en fonction de z:

D'après le graphique, les points M et R sont situés sur le même cercle d'équation: $x^2 + y^2 = (\text{rayon})^2$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que: $OM = OR = \text{rayon}$.

Or comme le point R est sur l'axe des abscisses, nous pouvons écrire:

$$z_R = |z_R|\,(\cos\theta + i\sin\theta) \iff z_R = |z_R|\,(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\iff z_R = |z_R|$$

$$\iff z_R = |z| \quad (|z_R| = |z| \text{ car } OM = OR).$$

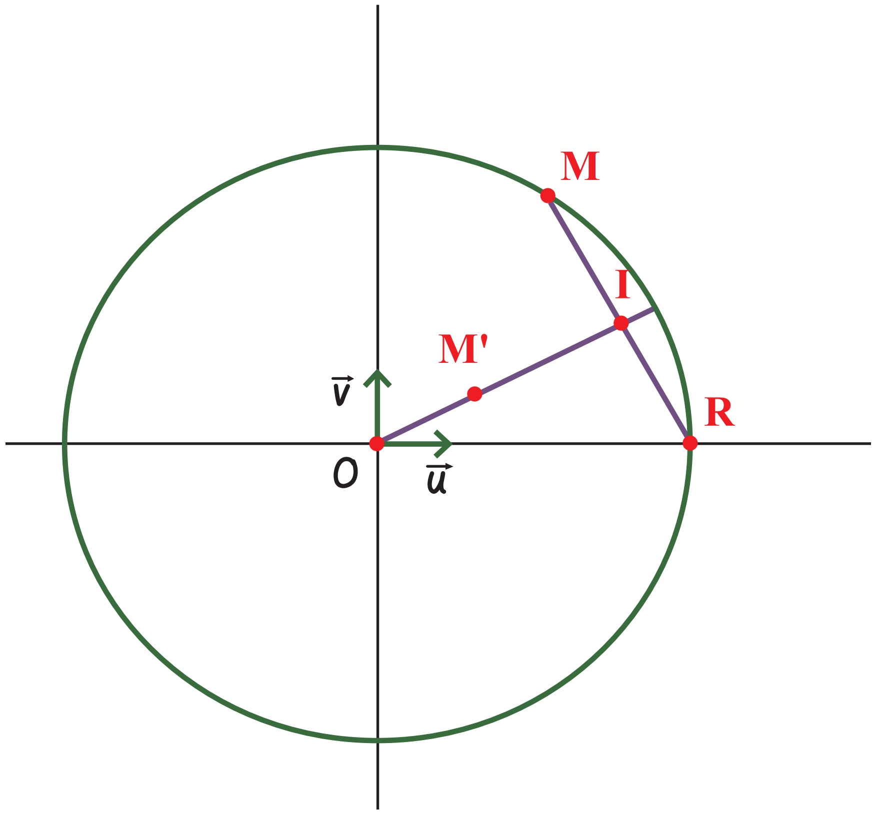
Au total, l'affixe du point R est: $z_R = |z|$.

2. Représentation graphique:

Notons que: • le point d'affixe $\dfrac{z + |z|}{2}$ correspond au point I, milieu du segment [MR];

• le point M' est alors le milieu du segment [OI].

D'où le graphique suivant:



Partie B

1. Déterminons le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$, quand z_0 est un réel strictement négatif:

Nous avons: $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in]-\infty ; 0[$.

Comme $z_0 \in]-\infty ; 0[$: $|z_0| = -z_0$.

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que: si $z_0 \in]-\infty ; 0[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 0$.

Initialisation:

• $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} \iff z_1 = \dfrac{z_0 - z_0}{4} \Rightarrow z_1 = 0$, vrai.

• $z_2 = \dfrac{z_1 + |z_1|}{4} \iff z_2 = \dfrac{z_1 - z_1}{4} \Rightarrow z_2 = 0$, vrai.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $z_n = 0$ et **montrons qu'alors** $z_{n+1} = 0$.

Supposons: $z_n = 0$, pour un entier naturel n fixé (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} = 0$$

$$\Rightarrow z_{n+1} = 0.$$

Conclusion: $\forall\ n \in \mathbb{N}$, nous avons: $z_n = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = 0$.

Au total: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point O (0).

2. Déterminons le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$, quand z_0 est un réel strictement positif:

Nous allons: $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in]-\infty ; 0[$.

Comme $z_0 \in]0 ; +\infty[$: $|z_0| = z_0$.

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que: **si $z_0 \in]0 ; +\infty[$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.**

Initialisation:

- $z_0 = x \Rightarrow z_0 = \frac{x}{2^0}$, **vrai**. **(en posant: $z_0 = x$)**

- $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} \Leftrightarrow z_1 = \frac{x + x}{4} \Rightarrow z_1 = \frac{x}{2^1}$ ou $z_1 = \frac{z_0}{2^1}$, **vrai**.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $z_n = \frac{z_0}{2^n}$ et **montrons qu'alors** $z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}$.

Supposons: $z_n = \frac{z_0}{2^n}$, pour un entier naturel n fixé (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| = \frac{z_0}{2^n} + \frac{z_0}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}.$$

Conclusion: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, nous avons: $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{z_0}{2^n}\right|$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{z_0}{2^n}$$

$$= 0.$$

Au total: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point O (0).

3. a. Quelle conjecture si z_0 n'est pas un réel ?

Nous avons: $|z_n| \leqslant \frac{1}{2}|z_{n-1}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_{n-2}| \leqslant .... \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

D'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

Or: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = 0$, car: $\frac{1}{2} \in]0, 1[$.

Au total, comme $|z_n| \geqslant 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = 0$ (conjecture).

3. b. Démontrons la conjecture et concluons:

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que: **si z_0 n'est pas un réel, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.**

Initialisation:

- $|z_0| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 |z_0|$? vrai car: $|z_0| \leqslant |z_0|$.

- $|z_1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^1 |z_0|$?

$|z_1| = \left|\frac{z_0 + |z_0|}{4}\right|$ <=> $|z_1| = \frac{1}{4}|z_0 + |z_0||$

$$\Rightarrow |z_1| \leqslant \frac{1}{4}(|z_0| + ||z_0||)$$

$$\Rightarrow |z_1| \leqslant \frac{1}{4}(|z_0| + |z_0|)$$

$$\Rightarrow |z_1| \leqslant \frac{1}{2}|z_0|$$

$$\Rightarrow |z_1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^1 |z_0|, \text{ donc } \textbf{vrai}.$$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $|z_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$ et **montrons qu'alors** $|z_{n+1}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|$.

Supposons: $|z_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$, pour un entier naturel n fixé (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| \leqslant z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} \leqslant \frac{z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|}{4}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z_n + |z_n|}{4}\right| \leqslant \left|\frac{z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|}{4}\right|$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}\left(|z_n| + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|\right)$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|\right)$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|.$$

Conclusion: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, nous avons: $|z_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

Au total:

- $0 \leqslant |z_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = 0$,
- d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons alors affirmer que: $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = 0$.

Dans ces conditions: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point O (0).