Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE

17

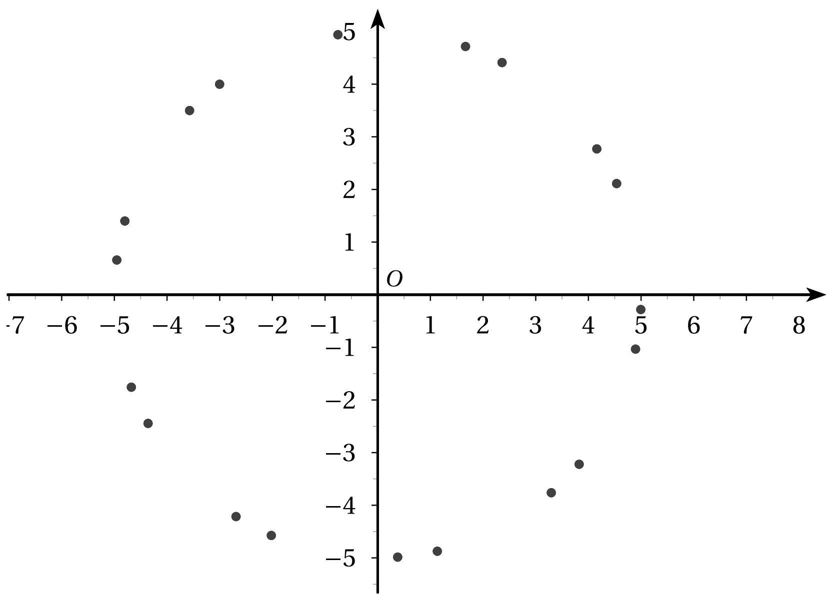
ÉNONCÉ

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\,;\,y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 0,8\,x_n - 0,6\,y_n \\ y_{n+1} = 0,6\,x_n + 0,8\,y_n \end{cases}.$$

1. a. Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

b. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2. On les nommera sur la figure jointe.

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n.

a. Soit $U_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos\theta = 0,8$ et $\sin\theta = 0,6$.

Montrer que, pour tout entier naturel n: $e^{i\theta} \cdot z_n = z_{n+1}$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n: $z_n = e^{n\theta} \cdot z_0$.

d. Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

e. Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n. Représenter θ sur la figure.

Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.