Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 17

CORRECTION

1. a. Déterminons les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2:

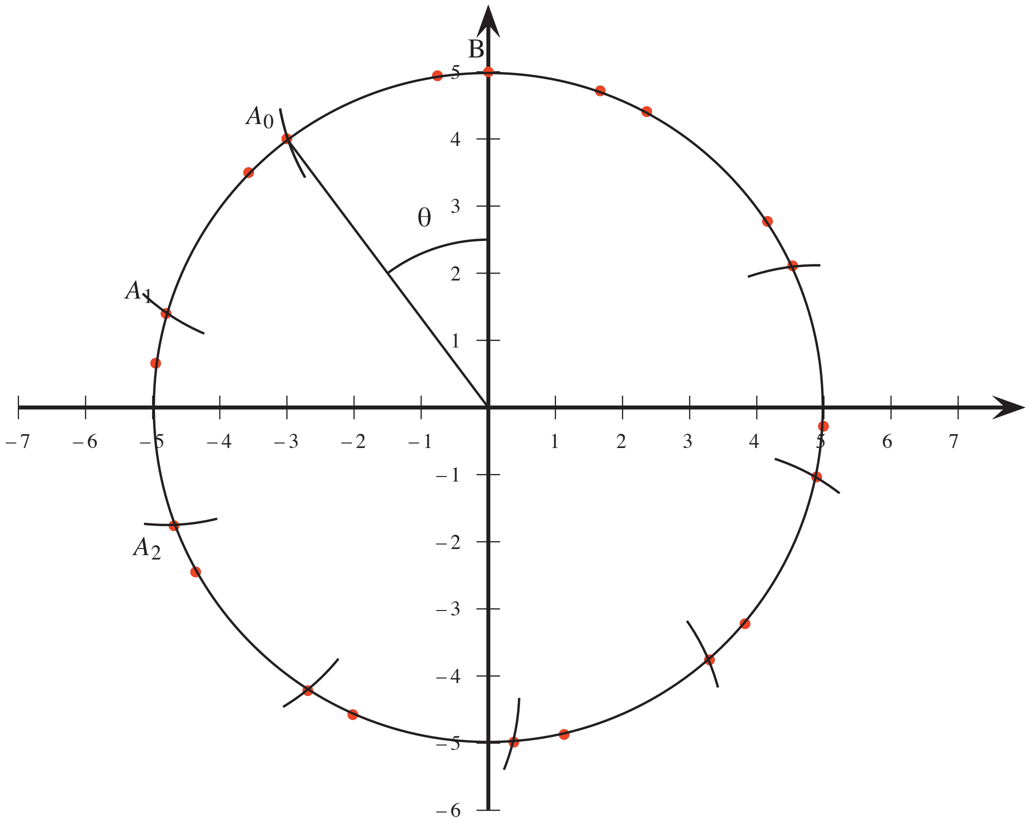
Nous avons: $\begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases}$.

Dans ces conditions:

- A_0 (-3 ; 4)
- A_1 (0,8 x -3 - 0,6 x 4 ; 0,6 x -3 + 0,8 x 4) cad A_1 (-4,8 ; 1,4)
- A_2 (0,8 x -4,8 - 0,6 x 1,4 ; 0,6 x -4,8 + 0,8 x 1,4) cad A_2 (-4,68 ; -1,76).

Au total: A0 (-3 ; 4), A1 (-4,8 ; 1,4) et A2 (-4,68 ; -1,76).

1. b. Identifions les points A_0, A_1 et A_2:



Notons que: tous les points semblent être sur un cercle de centre O et de rayon $R = 5$.

2. a. Montrons que, pour tout entier naturel n, $U_n = 5$:

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Initialisation:

- $U_0 = |z_0|$ <=> $U_0 = |-3 + 4i|$ <=> $U_0 = 5$, **vrai**.
- $U_1 = |z_1|$ <=> $U_1 = |-4,8 + 1,4i|$ <=> $U_1 = 5$, **vrai**.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n = 5$ et **montrons qu'alors** $U_{n+1} = 5$.

Supposons: $U_n = 5$, pour un entier naturel n fixé.

Dans ces conditions: $U_{n+1} = |z_{n+1}|$

$$\Rightarrow U_{n+1} = |(0,8x_n - 0,6y_n) + i\,(0,6x_n + 0,8y_n)|$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = ((0,8x_n - 0,6y_n)^2 + (0,6x_n + 0,8y_n)^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow (U_{n+1})^2 = 0,64x_n^2 + 0,36y_n^2 - 0,36x_n y_n + 0,36x_n^2 + 0,64y_n^2 + 0,36x_n y_n$$

$$\Rightarrow (U_{n+1})^2 = x_n^2 + y_n^2$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = (x_n^2 + y_n^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = |z_n|$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = U_n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = 5.$$

Conclusion: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, nous avons: $U_n = 5$.

Une interprétation géométrique est que tous les points A_i sont situés sur: le même cercle de centre O et de rayon $R = 5$ $(U_n = 5 = |z_n| = OA_n)$.

2. b. Montrons que, pour tout entier n, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$:

- $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ cad $z_{n+1} = (0,8x_n - 0,6y_n) + i\,(0,6x_n + 0,8y_n)$.
- $e^{i\theta} z_n = (\cos\theta + i\sin\theta)\,(x_n + iy_n)$

$$= (0,8 + 0,6i)\,(x_n + iy_n)$$

$$= 0,8x_n + i0,8y_n + i0,6x_n - 0,6y_n$$

$$= (0,8x_n - 0,6y_n) + i\,(0,6x_n + 0,8y_n).$$

Au total: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

2. c. Démontrons que, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{in\theta} z_0$:

Nous savons que: $z_{n+1} = e^{i\theta} z_n$.

Ainsi: **(z_n) est une suite géométrique de raisons $q = e^{i\theta}$ et de premier terme $z_0 = -3 + 4i$.**

Dans ces conditions, nous pouvons écrire: $z_n = e^{in\theta} z_0$.

Au total: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ z_n = e^{in\theta} z_0$.

2. d. Montrons que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z_0:

Nous savons que: $z_0 = -3 + 4i$.

Or, le module de z_0 est: $r_0 = 5$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $z_0 = 5\left(-\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\,i\right)$

$$= 5\,(-0,6 + 0,8\,i)$$

$$= 5i\,(0,6i + 0,8)$$

$$= 5i\,(0,8 + 0,6i)$$

$$= 5i\,(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Or: $5i = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ **cad** $5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Dans ces conditions: $z_0 = 5e^{i\frac{\pi}{2}} \times (\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= 5e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\theta}$$

$= 5e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}.$

Au total: z_0 a pour module $r_0 = 5$ et pour argument $\frac{\pi}{2} + \theta$.

2. e. Déterminons, en fonction de n et θ, un argument de z_n:

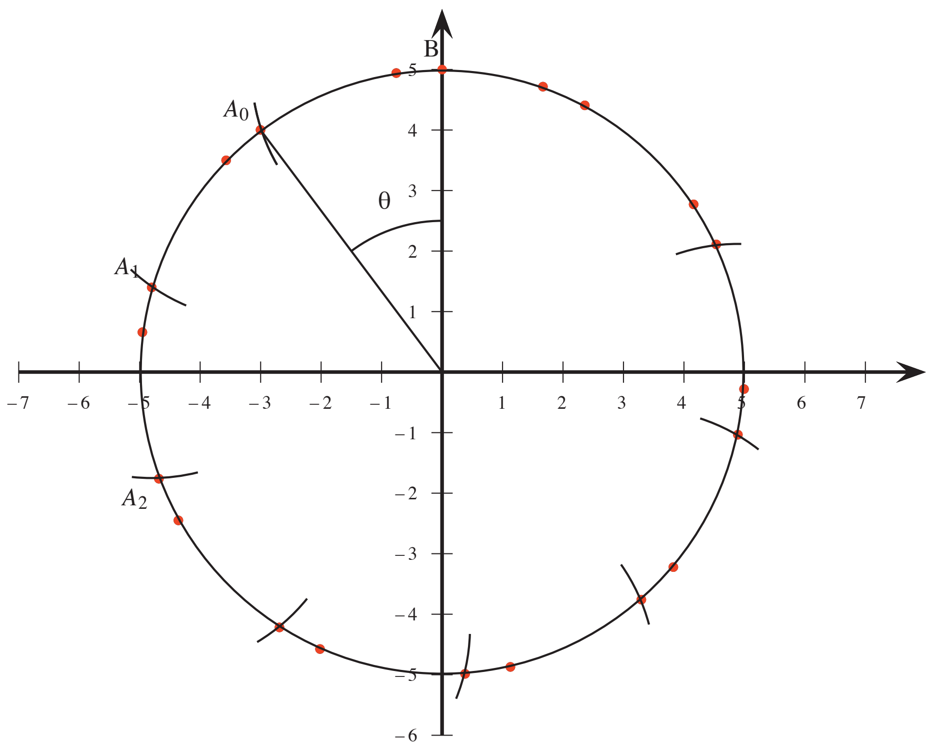
- $z_n = e^{in\theta}\, z_0$
- $z_0 = 5e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$

$\Rightarrow$ $z_n = 5e^{in\theta}\, e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$.

Ainsi: $z_n = 5e^{i(\frac{\pi}{2}+(n+1)\theta)}$.

Au total: un argument de z_n est donc $\frac{\pi}{2} + (n+1)\,\theta$.

Représentation graphique de θ:



Explication:

Pour construire A_{n+1} à partir de A_n, il suffit d'effectuer: une rotation de centre O et d'angle θ, et ce, tout autour du cercle de centre O et de rayon R égal à 5.