Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE

15

CORRECTION

1. Donnons la forme exponentielle de $A = \left(\frac{3}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$:

• Le module de A est: $|A| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Soit θ, l'argument de A: $A = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$.

Par identification: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ cad $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Sous forme exponentielle A s'écrit: $A = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. a. Montrons que (r_n) est géométrique et déterminons r_0 et q:

Nous savons que: $r_n = |z_n|$.

D'où: $r_{n+1} = |z_{n+1}|$

$= |A \cdot z_n|$

$$= |A| |z_n|$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} |z_n|$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} r_n \quad (|z_n| = r_n).$$

Au total, la suite (r_n) est géométrique:

de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = 1$.

2. b. Exprimons r_n en fonction de n, pour tout entier naturel n:

Comme $r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$, nous pouvons écrire:

$$r_n = r_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \quad \text{cad} \quad r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Au total, pour tout entier naturel n: $r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

2. c. Que dire de la longueur OA_n lorsque $n \to +\infty$:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer: $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$= 0, \quad \text{car: } \frac{\sqrt{3}}{2} \in]0 ; 1[.$$

Au total: • comme $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$, (r_n) est donc convergente,

• nous pouvons affirmer que la longueur OA_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. a. Démontrons que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}:

D'après Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} ssi:

$$(OA_{n+1})^2 + (A_nA_{n+1})^2 = (OA_n)^2.$$

Or ici: • $OA_n = |z_n| \Rightarrow OA_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$,

• $OA_{n+1} = |z_{n+1}| \Rightarrow OA_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$,

• $A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| \Rightarrow A_nA_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Au total, nous avons bien: $(OA_{n+1})^2 + (A_nA_{n+1})^2 = (OA_n)^2$

car: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n}$.

Et, par conséquent: le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

3. b. Déterminons les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées:

A_n a pour affixe $z_n = r_n\, e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

- z_n est un point de l'axe des ordonnées ssi: $z_n = i \cdot y$, avec $y \neq 0$.

  Sous forme exponentielle, z_n s'écrit alors: $z_n = y\, e^{i\frac{\pi}{2}}$.

- Or: $z_n = r_n\, e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

Par identification:

$$\begin{cases} y = r_n \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{n\pi}{6}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = r_n \\ i\dfrac{\pi}{2} = i\dfrac{n\pi}{6} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r_n = y \\ \dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$

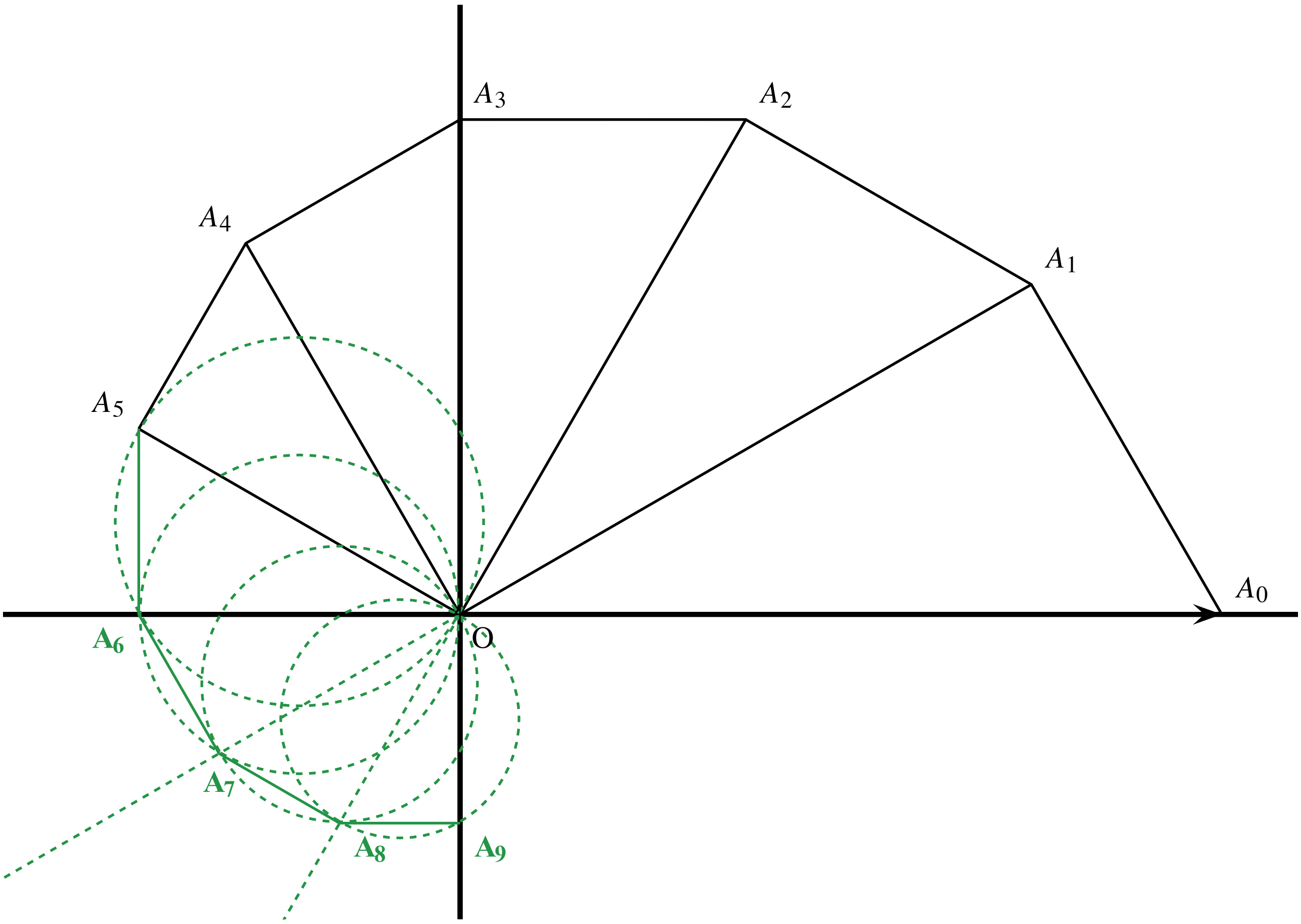
($k\pi$ car: imaginaire pur)

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} r_n = y \\ n = \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)}{\left(\dfrac{\pi}{6}\right)} \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} r_n = y \\ n = 3 + 6k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Au total, A_n est un point de l'axe des ordonnées ssi:

$$n = 3 + 6k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. c. Complétons la figure en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9:


A_3
A_2
A_4
A_1
A_5
A_0
A_6
O
A_7
A_8
A_9