Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 14

CORRECTION

Partie A

1. Calculons U_0:

$U_0 = |z_0| \iff U_0 = |\sqrt{3} - i|$ cad $U_0 = 2$.

Au total: $U_0 = 2$.

2. Montrons que (U_n) est géométrique et déterminons U_0 et q:

Nous savons que: $U_n = |z_n|$.

D'où: $U_{n+1} = |z_{n+1}|$

$= |(1 + i)\, z_n|$

$= |1 + i|\, |z_n|$

$= \sqrt{2}\, |z_n|$

$= \sqrt{2}\, U_n$ $(|z_n| = U_n)$.

Au total, la suite (U_n) est géométrique:

de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $U_0 = 2$.

3. Exprimons U_n en fonction de n, pour tout entier naturel n:

Comme $U_{n+1} = \sqrt{2}\, U_n$, nous pouvons écrire:

$U_n = U_0 (\sqrt{2})^n$ cad $U_n = 2 (\sqrt{2})^n$.

Au total, pour tout entier naturel n: $U_n = 2 (\sqrt{2})^n$.

4. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 2 (\sqrt{2})^n$$

$$= +\infty.$$

Au total: comme $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$, (U_n) est donc divergente.

Partie B

1. Déterminons la forme algébrique de z_1:

$z_1 = (1 + i)\, z_0 \iff z_1 = (1 + i)(\sqrt{3} - i)$ cad $z_1 = (\sqrt{3} + 1) + i (\sqrt{3} - 1)$.

Sous forme algébrique: $z_1 = (\sqrt{3} + 1) + i (\sqrt{3} - 1)$.

2. a. Déterminons la forme exponentielle de z_0 et $1 + i$:

En ce qui concerne z_0:

- Le module de z_0 est: $|z_0| = 2$.
- Soit θ, l'argument de z_0: $z_0 = 2 (\cos\theta + i \sin\theta) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$.

Par identification: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ cad $\theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Sous forme exponentielle z_0 s'écrit: $z_0 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

$$= 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

En ce qui concerne $1 + i$:

- Le module de $1 + i$ est: $|1 + i| = \sqrt{2}$.
- Soit θ, l'argument de $1 + i$: $1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Par identification: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Sous forme exponentielle $1 + i$ s'écrit: $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2. b. Déduisons-en la forme exponentielle de z_1:

Nous avons: $z_1 = (1 + i)\,z_0$.

D'où: $z_1 = \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \times \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$ cad $z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Au total, la forme exponentielle de z_1 est : $z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3. Déduisons-en la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

Nous savons que : • $z_1 = (\sqrt{3} + 1) + i\,(\sqrt{3} - 1)$

• $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Par identification : $2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{3} + 1$ cad $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

Au total : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.