

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ

On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O , on considère les points A_n d'affixes z_n .

1. a. Calculer z_1 , z_2 et z_3 .

b. Placer les points A_1 et A_2 sur un graphique.

c. Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme exponentielle.

d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La suite (r_n) est-elle convergente ? Interpréter.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 , etc.

$$\text{Ainsi: } L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n.$$

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.
- b. Donner une expression de L_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .