Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE

13

CORRECTION

1. a. Calculons z_1, z_2 et z_3:

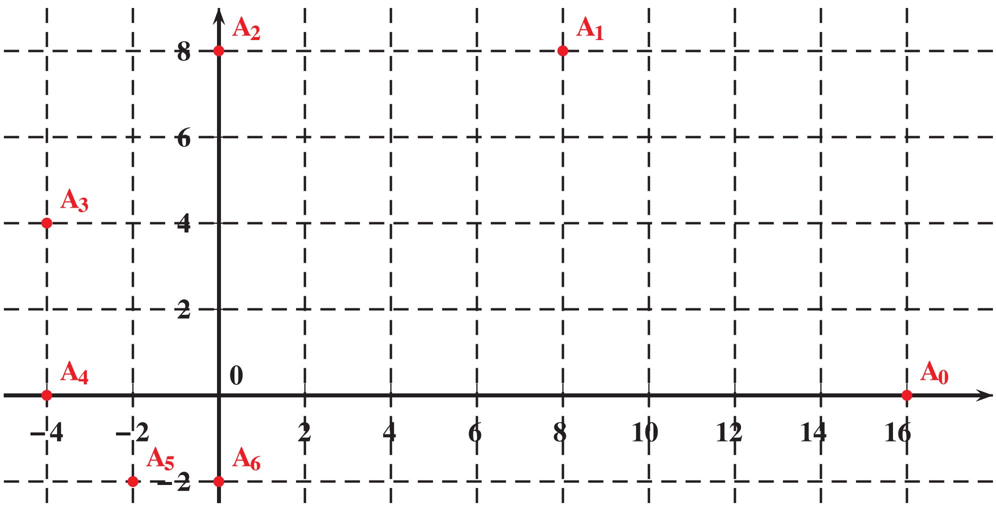
- $z_1 = \left(\frac{1+i}{2}\right) z_0 \iff z_1 = \left(\frac{1+i}{2}\right) \times (16)$ cad $z_1 = 8 + 8i$.

- $z_2 = \left(\frac{1+i}{2}\right) z_1 \iff z_2 = \left(\frac{1+i}{2}\right) \times (8+8i)$ cad $z_2 = 8i$.

- $z_3 = \left(\frac{1+i}{2}\right) z_2 \iff z_3 = \left(\frac{1+i}{2}\right) \times (8i)$ cad $z_3 = -4 + 4i$.

Au total: $z_1 = 8 + 8i$, $z_2 = 8i$ et $z_3 = -4 + 4i$.

1. b. Plaçons A_1 et A_2 sur un graphique:



1. c. Écrivons $\frac{(1+i)}{2}$ sous forme exponentielle:

• Le module de $\frac{1+i}{2}$ est: $r = \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

• Soit θ, l'argument de $\frac{1+i}{2}$: $\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Par identification: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Sous forme exponentielle $\frac{1+i}{2}$ s'écrit: $\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. d. Montrons que OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1:

OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 ssi: $\frac{z_0 - z_{A_1}}{z_{A_0} - z_{A_1}}$ est un imaginaire pur.

Or: • $z_0 - z_{A_1} = -8 - 8i$,

• $z_{A_0} - z_{A_1} = 8 - 8i$,

• $\frac{z_0 - z_{A_1}}{z_{A_0} - z_{A_1}} = \frac{-8 - 8i}{8 - 8i}$

$$= \frac{-(8+8i)(8+8i)}{(8-8i)(8+8i)}$$

$$= \frac{-(64 - 64 + 128i)}{128}$$

$$= -i.$$

Comme " $-i$ " est un imaginaire pur: OA_0A_1 est bien un triangle isocèle rectangle en A_1.

2. a. Démontrons que la suite (r_n) est géométrique et déterminons r_0 et q:

Nous savons que: $r_n = |z_n|$.

D'où: $r_{n+1} = |z_{n+1}|$

$$= \left| \frac{(1+i)}{2} z_n \right|$$

$$= \left| \frac{1+i}{2} \right| |z_n|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} r_n \quad (|z_n| = r_n).$$

Au total, la suite (r_n) est géométrique:

de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $r_0 = 16$.

2. b. (r_n) est-elle convergente ?

Comme $r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n$, nous pouvons écrire:

$$r_n = r_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \quad \text{cad} \quad r_n = 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$$= 0, \quad \text{car: } \frac{\sqrt{2}}{2} \in]0; 1[.$$

Au total: comme $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$, (r_n) est donc convergente.

2. c. Interprétation du résultat obtenu:

Géométriquement, cela signifie que la limite des points A_n est le point O.

3. a. Démontrons que pour tout entier naturel n, $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$:

$$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$$

$$= \left|\left(\frac{1+i}{2}\right) z_n - z_n\right|$$

$$= \left|\left(\frac{-1+i}{2}\right) z_n\right|$$

$$= \left|\frac{-1+i}{2}\right| |z_n|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} |r_n| \quad (|z_n| = r_n)$$

$$= r_{n+1} \quad \left(car : \; r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n \right).$$

Au total, nous avons bien: $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

3. b. Exprimons L_n en fonction de n:

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1}$$

$$= A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$$

$$= r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n.$$

Or:

- $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} r_0$
- $r_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 r_0$
- $r_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 r_0$
- ⋮
- $r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n r_0.$

Dans ces conditions:

$$L_n = r_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \right)$$

$$= r_0\,(q + q^2 + q^3 \ldots + q^n), \text{ avec: } \quad q = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= r_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 1\right)$$

$$= 8\sqrt{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right).$$

Au total, l'expression de L_n en fonction de n est:

$$L_n = 8\sqrt{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right).$$

3. c. Déterminons la limite de (L_n):

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0.$$

Dans ces conditions:

$$\lim_{n \to +\infty} L_n = \lim_{n \to +\infty} 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$= \frac{16}{\sqrt{2} - 1}.$$

Au total: la suite (L_n) est convergente.