

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes

## Terminale

Nombres Complexes  
Exercice de Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

1. a. Justifions que l'équation (E) admet deux solutions complexes non réelles:

L'équation (E) est:  $z^2 - 6z + c = 0$ , avec  $c \in \mathbb{R}$  et  $c > 9$ .

$$\Delta = 36 - 4c < 0 \text{ car: } c > 9.$$

Ainsi, comme  $\Delta < 0$ : l'équation (E) admet bien deux solutions complexes non réelles conjuguées  $z_A$  et  $z_B$ .

1. b. Déterminons les deux solutions de l'équation (E):

$$\Delta = 36 - 4c < 0, \text{ d'où 2 solutions dans } \mathbb{C}:$$

$$\begin{aligned} \bullet z_A &= \frac{6 + i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (\text{car: } \Delta = i^2 \times (-\Delta)) \\ &= \frac{6 + i\sqrt{4c - 36}}{2} \\ &= \frac{6 + i\sqrt{2^2(c - 9)}}{2} \\ &= \frac{6 + 2i\sqrt{c - 9}}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_A = 3 + i\sqrt{c - 9},$$

$$\bullet z_B = \frac{6 - i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (\text{car: } \Delta = i^2 \times (-\Delta))$$

$$\Rightarrow z_B = 3 - i\sqrt{c - 9}.$$

Au total, les deux solutions complexes non réelles conjuguées, de l'équation (E) sont bien:  $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$  et  $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$ .

## 2. Justifions que le triangle OAB est isocèle en O:

Soient les points:  $O(z_0)$ ,  $A(z_A)$  et  $B(z_B)$ ,

avec:  $z_0 = 0$ ,  $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$  et  $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$ .

OAB est un triangle isocèle en O ssi:  $OA = OB$ .

Or: •  $OA = |z_A - z_0| \Leftrightarrow OA = |3 + i\sqrt{c-9}| \Rightarrow OA = \sqrt{c}$ ,

•  $OB = |z_B - z_0| \Leftrightarrow OB = |3 - i\sqrt{c-9}| \Rightarrow OB = \sqrt{c}$ .

Au total, comme  $OA = OB$ : le triangle OAB est bien isocèle en O.

## 3. Déterminons la valeur réelle de " c " telle que le triangle OAB soit rectangle en O:

Le triangle OAB est rectangle en O ssi:  $\frac{z_B - z_0}{z_A - z_0}$  est un imaginaire pur.

(d'après le cours)

Ici: •  $z_B - z_0 = 3 - i\sqrt{c-9}$ ,

•  $z_A - z_0 = 3 + i\sqrt{c-9}$ .

D'où:  $\frac{z_B - z_0}{z_A - z_0} = \frac{3 - i\sqrt{c-9}}{3 + i\sqrt{c-9}}$

$$= \frac{(3 - i\sqrt{c-9}) \times (3 - i\sqrt{c-9})}{(3 + i\sqrt{c-9}) \times (3 - i\sqrt{c-9})}$$

$$= \frac{9 + i^2(c-9) - 6i\sqrt{c-9}}{3^2 + c - 9}$$

$$= \frac{18-c}{c} - \frac{6i\sqrt{c-9}}{c}.$$

Dans ces conditions,  $\frac{z_B - z_0}{z_A - z_0}$  est un imaginaire pur ssi:

$$\frac{18-c}{c} = 0 \text{ cad: } c = 18.$$

Au total, le triangle OAB est rectangle en O ssi:  $c = 18 > 9$ .