Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE

11

ÉNONCÉ

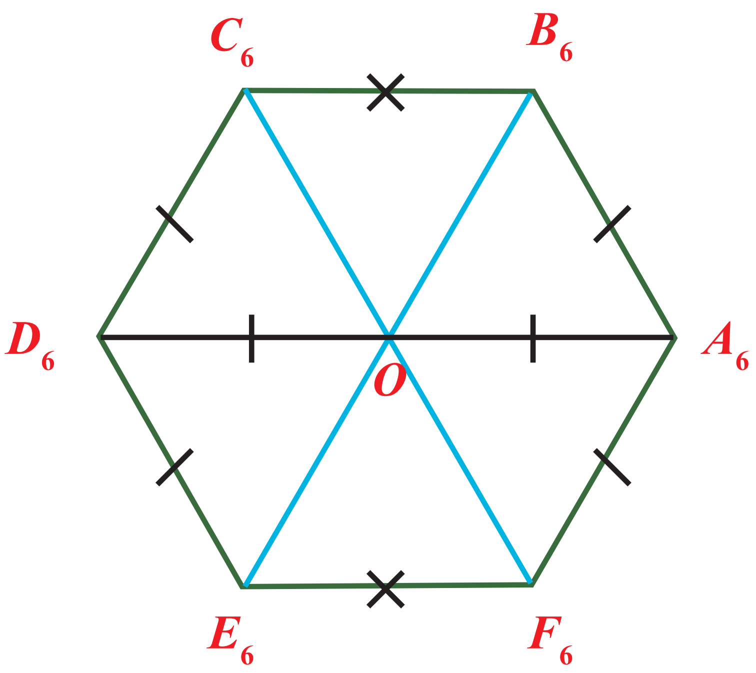
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier $n \geq 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.

On note $\mathbf{r_n = OA_n}$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A: Étude du cas particulier $n = 6$

On a représenté un polygone P_6 ci-dessous:



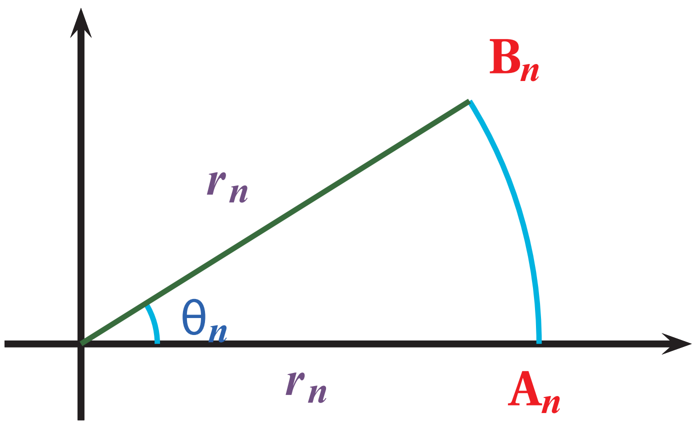
1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.

2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.

3. En déduire que: $r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B: Cas général avec $n \geqslant 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.



On note $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n puis établir que l'aire de ce triangle est égale à: $\frac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.

Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n})$, puis démontrer que:

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C: Étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; \pi[$ par:

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, pour $n \geqslant 4$, le nombre r_n s'écrit:

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi}\, f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; \pi[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a: $0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi$.

2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. On considère l'algorithme suivant:

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?