www.freemaths.fr

Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE

11

CORRECTION

Partie A: Étude du cas $n = 6$

1. Justifions que le triangle OA_6B_6 est équilatéral avec une aire égale à $\frac{1}{6}$:

Nous savons que:

- un triangle équilatéral est un triangle dont les 3 côtés sont égaux;
- un triangle isocèle est un triangle ayant au moins deux côtés de même longueur.

Soit le triangle OA_6B_6 isocèle en O, nous avons: $OA_6 = OB_6 = r_6$.

De plus, l'angle au sommet de ce triangle OA_6B_6 est: $\widehat{A_6OB_6} = \frac{\pi}{3}$.

En effet, le polygone est constitué de 6 triangles superposables au triangle OA_6B_6, et par conséquent: $\widehat{A_6OB_6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire:

$$\frac{\pi}{3} + \widehat{OA_6B_6} + \widehat{OB_6A_6} = \pi \iff \frac{\pi}{3} + 2 \times (\widehat{OA_6B_6}) = \pi \implies \widehat{OA_6B_6} = \frac{\pi}{3}.$$

Au total, comme $OA_6 = OB_6 = A_6B_6$:

Ainsi: $\widehat{A_6OB_6} = \widehat{OA_6B_6} = \widehat{OB_6A_6} = \frac{\pi}{3}$.

les 3 côtés sont égaux et ainsi le triangle OA_6B_6 est équilatéral.

Et comme l'aire du polygone est égale à " 1 " et qu'il y a 6 triangles superposables au triangle OA_6B_6:

$$\text{l'aire du triangle } OA_6B_6 = \frac{1}{6}.$$

2. Exprimons la hauteur du triangle OA_6B_6, issue du sommet B_6, en fonction de r_6:

D'après le cours, nous savons que:

- l'aire du triangle OA_6B_6 est: $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\, x \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}}$, avec $x = r_6$;
- l'aire du triangle OA_6B_6 est: $\mathscr{A} = \frac{x \times \text{hauteur}}{2}$, avec $x = r_6$.

En égalisant, nous avons:

$$\frac{1}{2}\, x \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x \times \text{hauteur}}{2} \iff \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \text{hauteur}$$

$$\iff \sqrt{\frac{3{r_6}^2}{4}} = \text{hauteur}$$

$$\Rightarrow \text{hauteur} = h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_6.$$

Au total, la hauteur du triangle OA_6B_6, issue du sommet B_6, est: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_6.$

3. Déduisons-en r_6:

Nous savons que: $\mathscr{A} = \frac{1}{6}$ et $\mathscr{A} = \frac{r_6 \times \text{hauteur}}{2}.$

D'où: $\frac{1}{6} = \frac{r_6 \times \text{hauteur}}{2} \iff \frac{1}{6} = \frac{r_6}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_6$

$$\iff \frac{1}{6} = {r_6}^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad r_6^{\,2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

Au total, nous avons bien: $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B: Cas général $n \geq 4$

1. a. La hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n en fonction de r_n et θ_n ?

Elle est égale à: $h = r_n \sin(\theta_n)$.

1. b. L'aire du triangle OA_nB_n en fonction de r_n et θ_n ?

L'aire du triangle OA_nB_n est: $\mathcal{A} = \dfrac{x \times \text{hauteur}}{2}$, avec $x = r_n$.

D'où: $\mathcal{A} = \dfrac{r_n \times r_n \sin(\theta_n)}{2} \Longrightarrow \mathcal{A} = \dfrac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}$.

En conclusion, nous avons bien: $\mathcal{A} = \dfrac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}$.

2. a. Donnons, en fonction de n, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n})$:

Comme le polygone est constitué de " n " triangles superposables au triangle OA_nB_n: $\widehat{A_nOB_n} = \dfrac{2\pi}{n}$.

Ainsi, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n})$ est: $\dfrac{2\pi}{n}$.

2. b. Déterminons r_n :

Comme dit précédemment : $\mathcal{A} = \dfrac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}$ (1).

Or : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{n}$.

D'où : (1) $\iff \dfrac{1}{n} = \dfrac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}$

$$\iff r_n^2 = \frac{2}{n} \times \frac{1}{\sin(\theta_n)}$$

$$\iff r_n^2 = \frac{2}{n} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \quad \left(\text{car : } \theta_n = \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow r_n = \sqrt{\frac{2}{n \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Au total : $r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}$.

Partie C : Étude de la suite (r_n)

1. Montrons que la suite (r_n) est décroissante :

Pour tout entier $n \geqslant 4$: $n+1 > n > 4$ (a).

(a) $\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow 2\pi \times 0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \frac{2\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \ 0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{2} < \pi$$

$$\Rightarrow \ 0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi \quad (b).$$

Or, f est strictement croissante sur l'intervalle $]\, 0\, ;\, \pi\, [$.

D'où: $(b) \Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\, f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < \frac{1}{\pi}\, f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\pi}\, f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\frac{1}{\pi}\, f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow r_{n+1} < r_n.$$

Au total, $n+1 > n > 4 \Rightarrow r_{n+1} < r_n$: la suite (r_n) est donc strictement décroissante sur $[\, 4\, ;\, +\infty\, [$.

2. Déduisons-en que la suite (r_n) est convergente:

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici:
- (r_n) est minorée par $m = 0$ $(r_n = OA_n \geqslant 0)$
- (r_n) est strictement décroissante pour tout entier $n \geqslant 4$.

Donc nous pouvons affirmer que (r_n) est une suite convergente.

3. Déterminons la valeur numérique de n affichée par cet algorithme:

Cet algorithme affiche la première valeur de n à partir de laquelle: $r_n \leqslant 0,58$.

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons: $n = 11$.

11 est donc la valeur numérique affichée par cet algorithme.