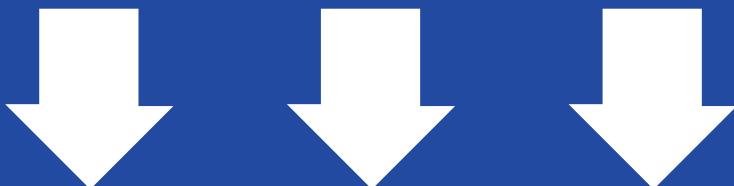


Maths Expertes

Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE

I

CORRECTION

1. L'affirmation 1 est: Fausse.

En effet, soit l'équation: $z - i = i(z + 1)$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow z - i = iz + i \Leftrightarrow z(1 - i) = 2i \Leftrightarrow z = \frac{2i}{1 - i} \text{ cad: } z = -1 + i.$$

• Le module de " $-1 + i$ " est: $|-1 + i| = \sqrt{2}$.

• Soit θ , l'argument de " $-1 + i$ ":

$$-1 + i = \sqrt{2} (\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Au total: $z = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \neq \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. L'affirmation 2 est: Fausse.

En effet, soit un réel $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$:

$$1 + e^{2ix} = 1 + (\cos(2x) + i \sin(2x))$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 + \cos(2x)) + i \sin(2x) \\
 &= 2 \cos^2 x + 2i \sin x \cos x, \text{ car:} \quad \bullet \cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 \\
 &\qquad \bullet \sin(2x) = 2 \sin x \cos x.
 \end{aligned}$$

D'où: $1 + e^{2ix} = 2 \cos x [\cos x + i \sin x]$ cad: $1 + e^{2ix} = 2 \cos x \times e^{ix}$.

Au total: $1 + e^{2ix} = 2 \cos x \times e^{ix} \neq 2 \cos x \times e^{-ix}$.

3. L'affirmation 3 est: Vraie.

En effet, soit M le point d'affixe: $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
 |z - i| = |z + 1| &\Leftrightarrow |x + iy - i| = |x + iy + 1| \\
 &\Leftrightarrow |x + i(y - 1)| = |(x + 1) + iy| \\
 &\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + y^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 - 2y = x^2 + 1 + 2x + y^2 \\
 &\Leftrightarrow -2y = 2x \text{ ou encore: } y = -x.
 \end{aligned}$$

Au total: le point M appartient bien à la droite d'équation $y = -x$.

4. L'affirmation 4 est: Fausse.

En effet, soit l'équation: $z^5 + z - i + 1 = 0 \quad (2)$.

Ici: $z = x \in \mathbb{R}$, car: z est un réel.

Dans ces conditions: (2) $\Leftrightarrow x^5 + x + 1 = i$.

Or: $x^5 + x + 1 \in \mathbb{R}$ et nous ne pouvons donc pas avoir: $x^5 + x + 1 = i$.

Au total: $z^5 + z + 1 \neq i$.