Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 1

CORRECTION

1. **L'affirmation 1 est : Fausse.**

En effet, soit l'équation : $z - i = i(z+1)$ (1).

(1) $\iff z - i = iz + i \iff z(1-i) = 2i \iff z = \dfrac{2i}{1-i}$ cad : $z = -1 + i$.

• Le module de " $-1+i$ " est : $|-1+i| = \sqrt{2}$.

• Soit θ, l'argument de " $-1+i$ " :

$$-1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right).$$

Par identification :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Au total : $z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \neq \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. **L'affirmation 2 est : Fausse.**

En effet, soit un réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$1 + e^{2ix} = 1 + (\cos(2x) + i\sin(2x))$

$= (1 + \cos(2x)) + i\sin(2x)$

$= 2\cos^2 x + 2i\sin x\cos x$, **car**: • $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

• $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

D'où: $1 + e^{2ix} = 2\cos x\,[\cos x + i\sin x]$ **cad**: $1 + e^{2ix} = 2\cos x \times e^{ix}$.

Au total: $1 + e^{2ix} = 2\cos x \times e^{ix} \neq 2\cos x \times e^{-ix}$.

3. L'affirmation 3 est: **Vraie**.

En effet, soit M le point d'affixe: $z = x + iy$.

$|z - i| = |z + 1| \iff |x + iy - i| = |x + iy + 1|$

$\iff |x + i(y - 1)| = |(x + 1) + iy|$

$\iff x^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + y^2$

$\iff x^2 + y^2 + 1 - 2y = x^2 + 1 + 2x + y^2$

$\iff -2y = 2x$ **ou encore**: $y = -x$.

Au total: le point M appartient bien à la droite d'équation $y = -x$.

4. L'affirmation 4 est: **Fausse**.

En effet, soit l'équation: $z^5 + z - i + 1 = 0$ (2).

Ici: $z = x \in \mathbb{R}$, car: z est un réel.

Dans ces conditions: (2) $\iff x^5 + x + 1 = i$.

Or: $x^5 + x + 1 \in \mathbb{R}$ et nous ne pouvons donc pas avoir: $x^5 + x + 1 = i$.

Au total: $z^5 + z + 1 \neq i$.