Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations du Premier Degré

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATIONS DU 1er DEGRÉ 3

CORRECTION

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{z-2}{z+i} = \dfrac{z-2i}{z+1}$:

Soit l'équation: $\dfrac{z-2}{z+i} = \dfrac{z-2i}{z+1}$.

Étape 1: détermination de l'ensemble de définition.

Il faut que: $\begin{cases} z + i \neq 0 \\ z + 1 \neq 0 \end{cases}$ cad $\begin{cases} z \neq -i \\ z \neq -1 \end{cases}$.

D'où l'ensemble de définition est: $\mathbb{C} - \{-i ; -1\}$.

Étape 2: résolution de l'équation sur $\mathbb{C} - \{-i ; -1\}$.

$\dfrac{z-2}{z+i} = \dfrac{z-2i}{z+1}$ <=> $(z-2)(z+1) = (z-2i)(z+i)$

<=> $z^2 + z - 2z - 2 = z^2 + iz - 2iz + 2$

<=> $-z - 2 = -iz + 2$

<=> $-(x + iy) - 2 = -i(x + iy) + 2$

<=> $-x - iy - 2 = -ix + y + 2$

$$\Longleftrightarrow \quad (-x - y - 4) + i \times (-y + x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ -y + x = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = -4 \\ x = y \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

En conclusion la solution est: $z = -2 + i \times (-2)$.

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{-z}{iz+1} + \dfrac{3z}{z-i} = 3 + i$:

Soit l'équation: $\dfrac{-z}{iz+1} + \dfrac{3z}{z-i} = 3 + i$.

Étape 1: détermination de l'ensemble de définition.

Il faut que: $\begin{cases} iz + 1 \neq 0 \\ z - i \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z \neq \dfrac{-1}{i} \\ z \neq i \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} z \neq \dfrac{-1 \times i}{i^2} \\ z \neq i \end{cases} \quad \text{cad} \quad z \neq i.$$

D'où l'ensemble de définition est: $\mathbb{C} - \{ i \}$.

Étape 2: résolution de l'équation sur $\mathbb{C} - \{ i \}$.

$$\frac{-z}{iz+1} + \frac{3z}{z-i} = 3 + i \Longleftrightarrow -z(z-i) + 3z(iz+1) = (3+i)(iz+1)(z-i)$$

$$\iff -z^2 + iz + 3iz^2 + 3z = (3+i)(iz^2 + z + z - i)$$

$$\iff 3z - 3i + iz + 1 = 0$$

$$\iff 3(x+iy) - 3i + i(x+iy) + 1 = 0$$

$$\iff 3x + 3iy - 3i + ix - y + 1 = 0$$

$$\iff (3x - y + 1) + i \times (3y + x - 3) = 0$$

$$\iff \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ 3y + x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3(-3y+3) - y + 1 = 0 \\ x = -3y + 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -9y + 9 - y + 1 = 0 \\ x = -3y + 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -10y + 10 = 0 \\ x = -3y + 3 \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Or: " $x = 0$ " et " $y = 1$ " signifie que $z = 0 + i \times 1 = i \notin \mathbb{C} - \{ i \}$.

En conclusion, l'équation $\dfrac{-z}{iz+1} + \dfrac{3z}{z-i} = 3 + i$ n'admet aucune solution.