

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Graphes, Matrices, Suites



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

UNE SOCIÉTÉ D'AUTOROUTE

Une société d'autoroute étudie l'évolution de l'état de ses automates de péage en l'absence de maintenance.

Un automate peut se trouver dans l'un des états suivants :

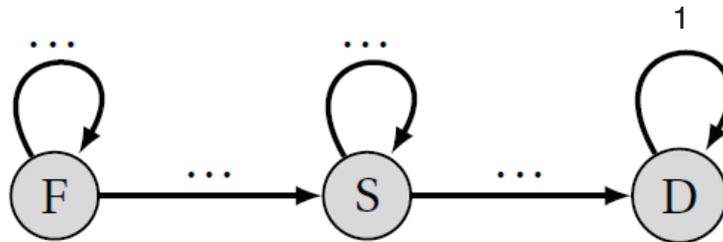
- fonctionnel (F) ;
- en sursis (S) s'il fonctionne encore, mais montre des signes de faiblesse ;
- défaillant (D) s'il ne fonctionne plus.

La société a observé que d'un jour sur l'autre :

- concernant les automates fonctionnels, 90% le restent et 10% deviennent en sursis ;
- concernant les automates en sursis, 80% le restent et 20% deviennent défaillants.

1.

- a. Reproduire et compléter le graphe probabiliste ci-après qui représente les évolutions possibles de l'état d'un automate.



- b. Interpréter le nombre 1 qui apparaît sur ce graphe.

- c. Voici la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre F, S, D.

Préciser la signification du coefficient 0,2 dans cette matrice.

2. À compter d'une certaine date, la société relève chaque jour à midi l'état de ses automates. On note ainsi pour tout entier naturel n :

- f_n la probabilité qu'un automate soit fonctionnel le $n^{\text{ième}}$ jour ;
- s_n la probabilité qu'un automate soit en sursis le $n^{\text{ième}}$ jour ;
- d_n la probabilité qu'un automate soit défaillant le $n^{\text{ième}}$ jour.

On note alors $P_n = (f_n \quad s_n \quad d_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste le $n^{\text{ième}}$ jour.

Enfin, la société observe qu'au début de l'expérience tous ses automates sont fonctionnels : on a donc $P_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$.

- a. Calculer P_1 .

- b. Montrer que, le 3^{ème} jour, l'état probabiliste est $(0,729 \quad 0,217 \quad 0,054)$.

- c. Vérifier que ce graphe possède un unique état stable $P = (0 \quad 0 \quad 1)$.
Quelle est la signification de ce résultat pour la situation étudiée ?

3.

a. Justifier que pour tout entier naturel n , $s_{n+1} = 0,1f_n + 0,8s_n$.

b. On vérifierait de même que pour tout entier naturel n ,

$$d_{n+1} = 0,2s_n + d_n \text{ et } f_{n+1} = 0,9f_n.$$

Compléter l'algorithme ci-dessous de sorte qu'il affiche le nombre de jours au bout duquel 30 % des automates ne fonctionnent plus.

```
D ← 0
S ← ...
F ← 1
N ← 0
Tant que .....
    D ← 0,2 × S + D
    S ← 0,1 × F + 0,8 × S
    F ← 0,9 × F
    N ← ...
Fin Tant que
Afficher ...
```

c. Au bout de combien de jours la proportion d'automates défectueux devient-elle supérieure à 30 % ?

d. Dans le codage de la boucle « Tant que », l'ordre d'affectation des variables D, S et F est-il important ? Justifier.