

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes Terminale

Graphes, Matrices, Suites



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# LE FOOTING QUOTIDIEN

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1<sup>er</sup> janvier 2014.

On admet que :

- Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,2 ;
- s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ».

Pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $c_n$  la probabilité de l'événement « Hugo court le  $(n + 1)$ -ième jour » ;
- $r_n$  la probabilité de l'événement « Hugo ne court pas le  $(n + 1)$ -ième jour » ;
- $P_n$  la matrice  $(c_n \ r_n)$  correspondant à l'état probabiliste le  $(n + 1)$ -ième jour.

Le 1<sup>er</sup> janvier 2014, motivé, le jeune homme court.

On a donc :  $P_0 = (c_0 \ r_0) = (1 \ 0)$ .

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. On donne  $M^6 = \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix}$ .  
Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité  $c_6$  qu'Hugo coure le 7<sup>e</sup> jour ?  
Déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $c_6$ .
4.
  - a. Exprimer  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$ .
  - b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$ .
5. Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = c_n - 0,75$ .
  - a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,2. Préciser le premier terme.
  - b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ .
  - c. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$ .
  - d. Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?
  - e. Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.  
Comment valider votre conjecture ?