

www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

Graphes, Matrices, Suites



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

LA CARTE JEUNE

La mairie d'une ville propose une carte jeune annuelle donnant droit à des réductions sur les activités culturelles et de loisirs. La mairie espère que dans l'avenir, au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte et si oui, en quelle année cela se produirait.

Ces dernières années, lors du renouvellement de la carte, on a constaté que 10 % des possesseurs de la carte ne la rachètent pas. Dans le même temps, 30 % de la population des 12-18 ans qui ne la possédaient pas l'année précédente achètent la carte. On fait l'hypothèse que l'effectif de la population des 12-18 ans est constant et que l'évolution va rester la même pour les prochaines années.

En 2018, 80 % des jeunes de 12-18 ans ne possédaient pas la carte.

On note, pour tout entier naturel n , a_n la part de la population des 12-18 ans de la ville possédant la carte l'année $2018+n$, et b_n la part de la population des 12-18 ans ne la possédant pas.

Partie A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B où le sommet A représente l'état « posséder une carte jeune » et B l'état « ne pas posséder une carte jeune ».
2. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre A puis B des sommets.
3.
 - a. Vérifier que $a_2 = 0,552$ et $b_2 = 0,448$.
 - b. Interpréter le coefficient 0,552 dans le contexte de l'énoncé.
4. On note a et b les coefficients de la matrice P correspondant à l'état stable de ce graphe.
 - a. Montrer que les nombres a et b sont solutions du système
$$\begin{cases} -0,1a + 0,3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} .$$
 - b. Justifier que la mairie peut espérer qu'à l'avenir au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte.

Partie B

On admet que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,6 a_n + 0,3$ et que la suite (a_n) est croissante.

1. On donne l'algorithme suivant dans lequel A est un nombre réel et N est un entier naturel.

$A \leftarrow 0,2$
$N \leftarrow 0$
Tant que faire
A prend la valeur
N prend la valeur
Fin Tant Que

Recopier puis compléter les pointillés des lignes 3 à 5 de l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche le nombre d'années nécessaires à la mairie pour atteindre son objectif qu'au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte.

2. En quelle année l'objectif sera-t-il atteint?