Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

JULIE

Pour se rendre à l'université, Julie peut emprunter deux itinéraires, l'un passant par des routes départementales, l'autre par une voie rapide. Elle teste les deux itinéraires.
Lorsque Julie emprunte la voie rapide un jour, la probabilité qu'elle emprunte le même itinéraire le lendemain est de 0,6.
Lorsque Julie emprunte les routes départementales un jour, la probabilité qu'elle emprunte la voie rapide le lendemain est de 0,2.
Le premier jour, Julie emprunte la voie rapide.

On note :

- D l'événement « Julie emprunte les routes départementales » ;
- R l'événement « Julie emprunte la voie rapide ».

1. a) Traduire ces informations à l'aide d'un graphe probabiliste dont les sommets seront notés D et R.
   b) Donner la matrice d'adjacence M correspondant au graphe probabiliste. Les sommets du graphe seront rangés dans l'ordre alphabétique.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'état probabiliste le n-ième jour est défini par la matrice $P_n = (d_n \quad r_n)$ où d_n désigne la probabilité que Julie emprunte les routes départementales le n-ième jour et r_n la probabilité que Julie emprunte la voie rapide le n-ième jour.
   a) Donner P_1.
   b) Calculer M^2 et en déduire la probabilité que Julie emprunte les routes départementales le 3^e jour.

3. a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, P_{n+1} en fonction de P_n et en déduire les expressions de d_{n+1} et r_{n+1} en fonction de d_n et r_n.
   b) Parmi les algorithmes suivants, lequel donne les termes d_3 et r_3 ?

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$D \leftarrow 0$ $R \leftarrow 1$ Pour N allant de 1 à 3 $\quad D \leftarrow 0{,}8D + 0{,}4R$ $\quad R \leftarrow 0{,}2D + 0{,}6R$ Fin Pour	$D \leftarrow 0$ $R \leftarrow 1$ Pour N allant de 1 à 3 $\quad D \leftarrow 0{,}8D + 0{,}4R$ $\quad R \leftarrow 1 - D$ Fin Pour	$D \leftarrow 0$ $R \leftarrow 1$ Pour N allant de 2 à 3 $\quad D \leftarrow 0{,}8D + 0{,}4R$ $\quad R \leftarrow 1 - D$ Fin Pour

4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0{,}4\, r_n + 0{,}2$.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = r_n - \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel n non nul.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_1.
   b) Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$r_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0{,}4^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times 0{,}4^n$$
   c) Que peut-on prévoir sur le long terme ?