Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PGCD

09

Correction

n est un entier relatif, et les entiers relatifs A et B s'expriment en fonction de n :

$A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$.

Rappelons le lemme d'Euclide :

Si a, b, q, r sont des entiers relatifs non nuls tels que $a = bq + r$, alors $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;r)$. Ce résultat est encore valable si, des trois entiers a, b, r, deux ne sont pas nuls.

1.a. Montrons que $\text{PGCD}(A\,;B) = \text{PGCD}(A\,;4)$:

L'expression définissant A permet, en l'inversant, d'exprimer n en fonction de A : $n = A + 1$.

Exploitons cette expression inverse pour trouver une relation directe entre A et B, indépendante de n :

$B = n^2 - 3n + 6 = (A+1)^2 - 3(A+1) + 6$

Nous obtenons : $B = (A^2 + 2A + 1) - (3A + 3) + 6 = A^2 - A + 4$ soit : $B = A(A-1) + 4$.

Il s'agit d'une combinaison entière de A et de B à laquelle nous pouvons appliquer le lemme d'Euclide avec les paramètres $a = B\,; b = A\,; q = A - 1\,; r = 4$.

Notons que $B = n^2 - 3n + 6$ n'est jamais nul, l'application du lemme est légitime même si $n = 1$.

En vertu du lemme d'Euclide : $\text{PGCD}(A\,;\,B) = \text{PGCD}(A\,;\,4)$

Ce PGCD, en tant que diviseur positif de 4, est égal ou bien à 1 ou bien à 2 ou bien à 4.

1.b. Déduisons-en, suivant les valeurs de *n*, quel est le PGCD de *A* et *B* :

Discutons en termes de congruence modulo 4, suivant la valeur du reste *r* de la division euclidienne de *n* par 4. Nous donnons les résultats sous forme de tableau :

Si *r* = …	$A = n - 1 \equiv \cdots\ [4]$	PGCD$(A\ ;\ 4)$	PGCD$(A\ ;\ B)$
0	-1	1	1
1	0	4	4
2	1	1	1
3	2	2	2

En d'autres termes et pour conclure :

- Si *n* est congru à 0 ou 2 modulo 4, c'est-à-dire si *n* est un entier pair, alors *A* et *B* sont premiers entre eux, leur PGCD est égal à 1.
- Si *n* est de la forme $4k + 1$ (*k* entier relatif) alors PGCD$(A\ ;\ B) = 4$.
- Si *n* est de la forme $4k + 3$ (*k* entier relatif) alors PGCD$(A\ ;\ B) = 2$.

2. Déterminons les valeurs de *n* pour lesquelles $\frac{B}{A}$ est un entier relatif :

Compte tenu de la relation $B = A(A-1) + 4$ obtenue dans la **question 1.a**, nous pouvons exprimer autrement le quotient $\frac{B}{A}$:

$$\frac{B}{A} = \frac{A(A-1)+4}{A} = A - 1 + \frac{4}{A}$$

Ce quotient se présente ainsi comme la somme d'un nombre entier et d'un nombre rationnel. Il s'agit d'un nombre entier si et seulement si $\frac{4}{A}$ est un nombre entier, c'est-à-dire si et seulement si *A* divise 4.

Or, l'ensemble des diviseurs de 4 est l'ensemble $\{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$.

Le quotient $\frac{B}{A}$ est un nombre entier si et seulement si l'entier $n - 1$ appartient à cet ensemble.

$\frac{B}{A}$ est un nombre entier si et seulement si *n* appartient à l'ensemble $\{-3, -1, 0, 2, 3, 5\}$.

Vérification sur cette copie d'écran que si *n* appartient à cet ensemble, alors $\frac{B}{A}$ est un entier.

Define $f(n)=\frac{n^2-3\cdot n+6}{n-1}$ *Terminé*

$\{f(-3), f(-1), f(0), f(2), f(3), f(5)\}$ $\{-6, -5, -6, 4, 3, 4\}$