Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PGCD

07

Correction

Nous poserons : $A(n) = n(n+1)$ et $B(n) = (n-1)(n+2)$.

L'hypothèse « $n \geq 2$ » garantit que le nombre $(n-1)$ est un entier strictement positif. C'est le cas aussi, *a fortiori*, des entiers $(n+1)$ et $(n+2)$. De ce fait, $A(n)$ et $B(n)$ sont des entiers strictement positifs car chacun est un produit de deux entiers strictement positifs.

Rappelons le lemme d'Euclide :

Si *a, b, q, r* sont des entiers relatifs non nuls tels que $a = bq + r$, alors $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = \mathrm{PGCD}(b\,;r)$.

1. Déterminons le PGCD de $A(n)$ et de $B(n)$:

Développons les expressions de $A(n)$ et de $B(n)$:

$A(n) = n^2 + n$ et $B(n) = n^2 + n - 2$. Nous constatons que les termes dépendant de *n* sont identiques dans les deux expressions.

Nous en déduisons la relation $A(n) = B(n) + 2$, combinaison entière qui a l'avantage d'être indépendante de *n*.

Appliquons le lemme d'Euclide à cette combinaison entière avec les paramètres :

$a = A(n)\,; b = B(n)\,; q = 1\,; r = 2$:

En vertu du lemme d'Euclide,

$$\mathrm{PGCD}(A(n)\,;\,B(n)) = \mathrm{PGCD}(A(n)\,;\,2)$$

Il en résulte que ce PGCD, en tant que diviseur positif de 2, est égal ou bien à 1 ou bien à 2.

Or, $A(n)$ est, par sa définition, le produit des deux entiers consécutifs *n* et $(n+1)$. Ces deux entiers consécutifs sont toujours de parité différente, l'un est pair et l'autre impair, donc leur produit est toujours un nombre pair. $A(n)$ est toujours un multiple de 2.

Quel que soit l'entier $n \geq 2$, $\text{PGCD}(A(n)\ ;\ 2) = 2$

Nous en déduisons :

Quel que soit l'entier $n \geq 2$, $\text{PGCD}(A(n)\ ;\ B(n)) = 2$

2. Concluons à propos des deux nombres *a* et *b* :

Du fait de leur définition, *a* et *b* sont *a priori* deux nombres rationnels strictement positifs, car chacun est le quotient de deux nombres entiers strictement positifs : $a = \frac{A(n)}{2}$ et $b = \frac{B(n)}{2}$.

Or, la question précédente a démontré que 2 était un diviseur commun à $A(n)$ et à $B(n)$.

Puisque $A(n)$ et à $B(n)$ sont tous les deux divisibles par 2, les deux nombres rationnels $\frac{A(n)}{2}$ et $\frac{B(n)}{2}$ sont des entiers.

Conclusion : *a* et *b* sont des entiers strictement positifs.

NB. Le nombre entier $a = \frac{n(n+1)}{2}$ jouit d'une certaine célébrité et le lecteur l'a peut-être déjà rencontré à l'occasion de l'étude des suites arithmétiques ; il représente la somme des *n* premiers entiers strictement positifs.