Maths Expertes

Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PGCD

06

Correction

NB. Cet exercice est une application du théorème suivant :

Soit *a* et *b* deux entiers relatifs non nuls et *d* un de leurs diviseurs communs positifs.

Nous savons qu'il existe alors deux entiers relatifs *a'* et *b'* non nuls tels que $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$.

Théorème : *d* est le PGCD de *a* et de *b* si et seulement si les entiers *a'* et *b'* sont premiers entre eux.

La méthode de résolution commune aux systèmes proposés dans cet exercice consistera à effectuer le changement de variable $\begin{cases} a = \Delta a' \\ b = \Delta b' \end{cases}$ où Δ est le PGCD de *a* et *b* et à se ramener ainsi à des conditions portant sur les entiers premiers entre eux *a'* et *b'*.

1. Résolvons le système (I_1) $\begin{cases} \boldsymbol{ab = 432} \\ \textbf{PGCD}(\boldsymbol{a}\,;\ \boldsymbol{b}) = \mathbf{6} \end{cases}$ **:**

Notons que ce système ne peut avoir de solutions que si 432 est un multiple de 6^2. C'est effectivement le cas : $432 = 12 \times 36 = 12 \times 6^2$.

Pour tout couple $(a,\ b)$ solution de (I_1), *a* et *b* sont des entiers naturels non nuls dont le PGCD est égal à 6. Soit *a'* et *b'* les deux entiers strictement positifs définis par les relations : $\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \end{cases}$.

- D'après le théorème cité en préambule, *a'* et *b'* sont premiers entre eux.
- Le produit *ab* s'exprime en fonction de *a'* et de *b'* : $ab = (6a') \times (6b') = 36a'b'$. En conséquence nous avons l'équivalence : $ab = 432 = 12 \times 36 \Leftrightarrow \quad a'b' = 12$.

Le système (I_1) est donc équivalent au système (II_1) $\begin{cases} a'b' = 12 \\ \text{PGCD}(a',\ b') = 1 \end{cases}$ moyennant le changement de variables $\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \end{cases}$.

Résolvons (II_1) :

Pour cela, considérons les décompositions multiplicatives de 12 en produit de deux entiers strictement positifs : $12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$. Parmi ces décompositions multiplicatives, deux exactement sont constituées de produits de deux entiers premiers entre eux : $12 = 1 \times 12 = 3 \times 4$.

Compte tenu de la condition $a < b$, le système (II1) a pour solutions les deux couples

$$\begin{cases} (a', b') = (1, 12) \\ (a', b') = (3, 4) \end{cases}$$

Déduisons-en les couples solutions de (I_1) :

Nous les obtenons tous moyennant le changement de variable $\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \end{cases}$.

Les couples solutions de (I_1) sont les deux couples : $(6,\ 72)$; $(18,\ 24)$.

2. Résolvons le système (I_2) $\begin{cases} \boldsymbol{ab = 7776} \\ \mathbf{PGCD}(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}) = \mathbf{18} \end{cases}$:

Nous suivrons la même démarche que dans la question précédente. Notons que 7776 est bien un multiple de 18^2, ce qui est une condition nécessaire pour que (I_2) puisse avoir des solutions. En effet : $7776 = 24 \times 324 = 24 \times 18^2$.

Pour tout couple $(a,\ b)$ solution de (I_2), *a* et *b* sont des entiers naturels non nuls dont le PGCD est égal à 18. Soit *a'* et *b'* les deux entiers strictement positifs définis par les relations : $\begin{cases} a = 18a' \\ b = 18b' \end{cases}$.

- D'après le théorème cité en préambule, *a'* et *b'* sont premiers entre eux.
- Le produit *ab* s'exprime en fonction de *a'* et de *b'* : $ab = (18a') \times (18b') = 324a'b'$. En conséquence nous avons l'équivalence : $ab = 7776 = 24 \times 324 \Leftrightarrow \quad a'b' = 24$.

Le système (I_2) est donc équivalent au système (II_2) $\begin{cases} a'b' = 24 \\ \text{PGCD}(a',\ b') = 1 \end{cases}$ moyennant le changement de variables $\begin{cases} a = 18a' \\ b = 18b' \end{cases}$.

Résolvons (II_2) :

Pour cela, considérons les décompositions multiplicatives de 24 en produit de deux entiers strictement positifs : $24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$. Parmi ces quatre décompositions multiplicatives, deux, et deux seulement, sont constituées de produits de deux entiers premiers entre eux :

$$24 = 1 \times 24 = 3 \times 8$$

Compte tenu de la condition $a < b$, le système (II_2) a pour solutions les deux couples

$$\begin{cases} (a', b') = (1, 24) \\ (a', b') = (3, 8) \end{cases}$$

Déduisons-en les couples solutions de (I_2) :

Nous les obtenons tous moyennant le changement de variable $\begin{cases} a = 18a' \\ b = 18b' \end{cases}$.

Les couples solutions de (I_2) sont les deux couples : $(18,\ 432)$; $(54,\ 144)$.

3. Résolvons le système (I_3) $\begin{cases} \boldsymbol{a + b = 24} \\ \mathbf{PGCD}(\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}) = \mathbf{4} \end{cases}$:

Pour tout couple $(a,\ b)$ solution de (I_3), *a* et *b* sont des entiers naturels non nuls dont le PGCD est égal à 4. Soit *a'* et *b'* les deux entiers strictement positifs définis par les relations : $\begin{cases} a = 4a' \\ b = 4b' \end{cases}$.

- D'après le théorème cité en préambule, *a'* et *b'* sont premiers entre eux.
- La somme $a + b$ s'exprime en fonction de *a'* et de *b'* : $a + b = 4a' + 4b' = 4(a' + b')$. En conséquence nous avons l'équivalence : $a + b = 24 = 6 \times 4 \Leftrightarrow \quad a' + b' = 6$.

Le système (I_3) est donc équivalent au système (II_3) $\begin{cases} a' + b' = 6 \\ \mathrm{PGCD}(a',\ b') = 1 \end{cases}$ moyennant le changement de variables $\begin{cases} a = 4a' \\ b = 4b' \end{cases}$.

Résolvons (II_3) :

Pour cela, considérons les décompositions additives de 6 en somme de deux entiers strictement positifs : $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$. Parmi ces décompositions additives, une seule est constituée d'une somme de deux entiers premiers entre eux : $6 = 1 + 5$.

Compte tenu de la condition $a < b$, le système (II₃) a pour solution unique le couple $(1,\ 5)$.

Déduisons-en les solutions de (I₃) :

Nous les obtenons moyennant le changement de variable $\begin{cases} a = 4a' \\ b = 4b' \end{cases}$.

(I₃) a pour solution l'unique couple : $(4,\ 20)$.

Complément. Recherche exhaustive des solutions avec Python :

Les trois systèmes à résoudre dans cet exercice se prêtent à une résolution à l'aide d'un algorithme par la méthode d'exhaustivité. Pour cela, il nous faudra :

- Délimiter un ensemble fini dans lequel nous sommes sûrs que toutes les solutions se trouvent.
- Disposer d'un critère de sélection repérant les solutions et seulement elles.

<table>
<tr><td>Résolution de (I₁). Nous recherchons les solutions dans l'ensemble : $\begin{cases} 1 \leq a \leq 431 \\ a+1 \leq b \leq 432 \end{cases}$.</td><td>

```
>>> from math import gcd
>>> def i1():
        for a in range(1,432):
                for b in range(a+1,433):
                        if a*b==432 and gcd(a,b)==6:
                                print(a,b)

>>> i1()
6 72
18 24
```

</td></tr>
<tr><td>Résolution de (I₂). Nous recherchons les solutions dans l'ensemble : $\begin{cases} 1 \leq a \leq 7775 \\ a+1 \leq b \leq 7776 \end{cases}$</td><td>

```
>>> def i2():
        for a in range(1,7776):
                for b in range(a+1,7777):
                        if a*b==7776 and gcd(a,b)==18:
                                print(a,b)

>>> i2()
18 432
54 144
```

</td></tr>
<tr><td>Résolution de (I₃). Nous recherchons les solutions dans l'ensemble : $\begin{cases} 1 \leq a \leq 23 \\ a+1 \leq b \leq 24 \end{cases}$</td><td>

```
>>> def i3():
        for a in range(1,24):
                for b in range(a+1,25):
                        if a+b==24 and gcd(a,b)==4:
                                print(a,b)

>>> i3()
4 20
>>>
```

</td></tr>
</table>