Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PGCD

05

Correction

NB. Cet exercice est une application du théorème suivant :

Soit *a* et *b* deux entiers relatifs non nuls et *d* un de leurs diviseurs communs positifs.

Nous savons qu'il existe alors deux entiers relatifs *a'* et *b'* non nuls tels que $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$.

Théorème : *d* est le PGCD de *a* et de *b* si et seulement si les entiers *a'* et *b'* sont premiers entre eux.

La méthode de résolution commune aux systèmes proposés dans cet exercice consistera à effectuer le changement de variable $\begin{cases} a = \Delta a' \\ b = \Delta b' \end{cases}$ où Δ est le PGCD de *a* et *b* et à se ramener à des conditions portant sur les entiers premiers entre eux *a'* et *b'*.

1. Résolvons le système (I_1) $\begin{cases} \boldsymbol{a - b = 84} \\ \textbf{PGCD}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \mathbf{12} \end{cases}$:

Pour tout couple $(a,\ b)$ solution de (I_3), *a* et *b* sont des entiers naturels non nuls dont le PGCD est égal à 12. Soit *a'* et *b'* les deux entiers strictement positifs définis par les relations : $\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \end{cases}$.

- D'après le théorème cité en préambule, *a'* et *b'* sont premiers entre eux.
- La différence $a - b$ s'exprime en fonction de *a'* et de *b'* : $a - b = 12a' - 12b' = 12(a' - b')$.

  En conséquence nous avons l'équivalence : $a - b = 84 = 7 \times 12 \Leftrightarrow \quad a' - b' = 7$.

Le système (I_1) est donc équivalent au système (II_1) $\begin{cases} a' - b' = 7 \\ \text{PGCD}(a',\ b') = 1 \end{cases}$ moyennant le changement de variables $\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \end{cases}$.

Résolvons (II_1) :

Compte tenu de la relation $a' - b' = 7$, toit entier qui divise deux des trois nombres *a', b'* et 7 divise le troisième ; le PGCD de *a'* et de *b'* est le même que celui de *b'* et de 7. En particulier, *a'* et *b'* sont premiers entre eux si et seulement si *b'* et 7 sont premiers entre eux, c'est-à-dire, puisque 7 est un nombre premier, si et seulement si *b'* n'est pas un multiple de 7.
En conséquence, à tout entier relatif *k* non multiple de 7, nous pouvons associer le couple :
$(b' = k,\ a' = k + 7)$ qui est solution de (II_1).

Déduisons-en les solutions de (I_1) :

Nous les obtenons moyennant le changement de variable $\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \end{cases}$.

Les solutions de (I_1) sont tous les couples de la forme $(12k + 84,\ 12k)$ où *k* est un entier relatif non multiple de 7.

2. Résolvons le système (I_2) $\begin{cases} \boldsymbol{ab = 10830} \\ \textbf{PGCD}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \mathbf{19} \end{cases}$:

Notons que ce système ne peut avoir de solutions que si 10830 est un multiple de 19^2. C'est effectivement le cas, 10830 est bien un multiple de 19^2. En effet : $10830 = 30 \times 361 = 30 \times 19^2$.

Pour tout couple $(a,\ b)$ solution de (I_2), *a* et *b* sont des entiers naturels non nuls dont le PGCD est égal à 19. Soit *a'* et *b'* les deux entiers strictement positifs définis par les relations : $\begin{cases} a = 19a' \\ b = 19b' \end{cases}$.

- D'après le théorème cité en préambule, *a'* et *b'* sont premiers entre eux.
- Le produit *ab* s'exprime en fonction de *a'* et de *b'* : $ab = (19a') \times (19b') = 19^2 \times (a'b')$. En conséquence, $ab = 10830 = 30 \times 19^2 \iff a'b' = 30$.

Le système (I_2) est donc équivalent au système (II_2) $\begin{cases} a'b' = 30 \\ \text{PGCD}(a',\ b') = 1 \end{cases}$, moyennant le changement de variables $\begin{cases} a = 19a' \\ b = 19b' \end{cases}$.

Résolvons (II₂) :

Pour cela, considérons les décompositions multiplicatives de 30 en produit de deux entiers strictement positifs : $30 = 1 \times 30 = 2 \times 15 = 3 \times 10 = 5 \times 6$. Toutes ces décompositions multiplicatives sont constituées de produits de deux entiers premiers entre eux.

Le système (II₂) a pour solutions les quatre couples $\begin{cases} (a',\ b') = (1,\ 30) \\ (a',\ b') = (2,\ 15) \\ (a',\ b') = (3,\ 10) \\ (a',\ b') = (5,\ 6) \end{cases}$ et leurs symétriques respectifs $\begin{cases} (a',\ b') = (30,\ 1) \\ (a',\ b') = (15,\ 2) \\ (a',\ b') = (10,\ 3) \\ (a',\ b') = (6,\ 5) \end{cases}$, en tout 8 couples solutions.

Déduisons-en les couples solutions de (I₂) :

Nous les obtenons tous moyennant le changement de variable $\begin{cases} a = 19a' \\ b = 19b' \end{cases}$.

Les solutions de (I₂) sont les quatre couples : $(19,\ 570)$; $(38,\ 285)$; $(57,\ 190)$; $(95,\ 114)$ et leurs symétriques respectifs : $(570,\ 19)$; $(285,\ 38)$; $(190,\ 57)$; $(114,\ 95)$.

3. Résolvons le système (I₃) $\begin{cases} \boldsymbol{a^2 - b^2 = 5440} \\ \mathbf{PGCD}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \mathbf{8} \end{cases}$:

Notons que ce système ne peut avoir de solutions que si 5440 est un multiple de 8^2. C'est effectivement le cas : $5440 = 85 \times 8^2$.

Pour tout couple $(a,\ b)$ solution de (I₃), *a* et *b* sont des entiers naturels non nuls dont le PGCD est égal à 8. Soit *a'* et *b'* les deux entiers strictement positifs définis par les relations : $\begin{cases} a = 8a' \\ b = 8b' \end{cases}$.

- D'après le théorème cité en préambule, *a'* et *b'* sont premiers entre eux.
- $a^2 - b^2$ s'exprime en fonction de *a'* et *b'* : $a^2 - b^2 = (8a')^2 - (8b')^2 = 8^2 \times (a^2 - b^2)$. En conséquence, $a^2 - b^2 = 5440 = 85 \times 18^2 \iff a'^2 - b'^2 = 85$.

Le système (I₃) est donc équivalent au système (II₃) $\begin{cases} a'^2 - b'^2 = 85 \\ \mathrm{PGCD}(a',\ b') = 1 \end{cases}$, moyennant le changement de variables $\begin{cases} a = 8a' \\ b = 8b' \end{cases}$.

Résolvons (II_3) :

Dans l'équation $a'^2 - b'^2 = 85$, factorisons le premier membre, qui se présente comme une différence de deux carrés : $a'^2 - b'^2 = (a' - b') \times (a' + b') = 85$.

Cette factorisation nous amène à considérer les décompositions multiplicatives de 85 en produit de deux entiers strictement positifs : $85 = 1 \times 85 = 5 \times 17$.

Les entiers strictement positifs a' et b' susceptibles de constituer une solution doivent être tels que $a' - b'$ est égal au plus petit des deux facteurs d'une décomposition, et $a' + b'$ au plus grand.

Nous devons donc résoudre deux systèmes possibles :

- D'une part : $\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 85 \end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases} a' = 43 \\ b' = 42 \end{cases}$
- D'autre part : $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 17 \end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases} a' = 11 \\ b' = 6 \end{cases}$

Notons que 42 et 43 sont premiers entre eux, de même que 6 et 11.

Le système (II_3) a pour solutions les deux couples $\begin{cases} (a', b') = (43, 42) \\ (a', b') = (11, 6) \end{cases}$.

Déduisons-en les couples solutions de (I_3) :

Nous les obtenons tous moyennant le changement de variable $\begin{cases} a = 8a' \\ b = 8b' \end{cases}$.

Les solutions de (I_3) sont les deux couples : $(344, 336)$; $(88, 48)$.

Complément. Recherche exhaustive des solutions avec Python :

Contrairement au système (I_1) qui a une infinité de solutions, les deux autres systèmes à résoudre dans cet exercice se prêtent à une résolution à l'aide d'un algorithme par la méthode d'exhaustivité. Pour cela, il nous faudra :

- Délimiter un ensemble fini dans lequel nous sommes sûrs que toutes les solutions se trouvent.
- Disposer d'un critère de sélection repérant les solutions et seulement elles.

<table>
<tr>
<td>Résolution de (I_2). Nous recherchons les solutions dans l'ensemble :
$\begin{cases} 1 \leq a \leq 10830 \\ 1 \leq b \leq 10830 \end{cases}$
(Nous pourrions réduire l'investigation).</td>
<td>

```
>>> from math import gcd
>>> def i2():
        for a in range(1,10831):
            for b in range(1,10831):
                if a*b==10830 and gcd(a,b)==19:
                    print(a,b)


>>> i2()
19 570
38 285
57 190
95 114
114 95
190 57
285 38
570 19
```

</td>
</tr>
<tr>
<td>Résolution de (I_3).</td>
<td>

```
>>> def i3():
        for a in range(9,680):
            for b in range(1,a-7):
                if a*a-b*b==5440 and gcd(a,b)==8:
                    print(a,b)


>>> i3()
88 48
344 336
```

</td>
</tr>
</table>

Dans le cas de (I_3) :

Du fait que $a - b \geq 8$, nous avons $8 \times (a + b) \leq 5440$ et donc $8 < a < a + b \leq 680$.

L'ensemble des solutions est inclus dans le domaine défini par : $\begin{cases} 9 \leq a < 680 \\ 1 \leq b \leq a - 8 \end{cases}$.

<table>
<tr>
<td>En ce qui concerne (I_1), nous pouvons rechercher un échantillon de solutions, par exemples les solutions telles que $m \leq b \leq n$</td>
<td>

```
>>> from math import gcd
>>> def i1(m,n):
        for b in range(m,n+1):
            for a in range(m+84,n+85):
                if a-b==84 and gcd(a,b)==12:
                    print(a,b)
```

</td>
</tr>
<tr>
<td>Voici par exemple les solutions telles que $50 \leq b \leq 200$. Nous obtenons pour la valeur de b les multiples de 12 situés dans cette fourchette sauf 84 et 168.</td>
<td>

```
>>> i1(50,200)
144 60
156 72
180 96
192 108
204 120
216 132
228 144
240 156
264 180
276 192
```

</td>
</tr>
</table>