Maths Expertes

Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PGCD

04

Correction

NB. Rappelons le théorème suivant, qui nous sera utile pour les **questions 1 et 2** :

Soit *a* et *b* deux entiers relatifs non nuls et *d* un de leurs diviseurs communs positifs.

Nous savons qu'il existe alors deux entiers relatifs *a'* et *b'* non nuls tels que $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$.

Théorème : *d* est le PGCD de *a* et de *b* si et seulement si les entiers *a'* et *b'* sont premiers entre eux.

1. Disons quelque chose à propos des entiers *a'* et *b'* :

- L'affirmation de l'énoncé « entiers naturels non nuls » à propos de *a'* et *b'* ne va pas de soi, il convient de la justifier. Par hypothèse, *a* et *b* sont des entiers naturels non nuls dont le PGCD est égal à 27. Ces deux entiers sont donc divisibles par 27, ce qui justifie qu'on définit bien des entiers naturels non nuls en posant $a' = \frac{a}{27}$; $b' = \frac{b}{27}$.

- En vertu du théorème cité en préambule, les relations $\begin{cases} \text{PGCD}(a\,;\,b) = 27 \\ a = 27a' \\ b = 27b' \end{cases}$ permettent d'affirmer que :

  a' et *b'* sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux.

2. Justifions l'équivalence des systèmes (I) et (II) :

Supposons que le couple (*a*, *b*) soit solution du système (I), c'est-à-dire que : $\begin{cases} a + b = 216 \\ \text{PGCD}(a\,;\,b) = 27 \end{cases}$

Posons $a' = \frac{a}{27}$; $b' = \frac{b}{27}$ et appliquons le résultat de la première question : a' et b' sont des entiers naturels premiers entre eux, donc $\text{PGCD}(a'\,;\,b') = 1$, et ils vérifient la relation $27a' + 27b' = 216$.
Or, $216 = 27 \times 8$, donc la relation $27a' + 27b' = 216$ est équivalente à la relation $a' + b' = 8$.

Les entiers naturels non nuls *a'* et *b'* vérifient : $\begin{cases} a' + b' = 8 \\ \text{PGCD}(a'\,;\,b') = 1 \end{cases}$, c'est-à-dire le système (II).

Réciproquement, soit (a', b') un couple d'entiers naturels non nuls solution du système (II).

Ces deux entiers sont premiers entre eux puisqu'ils vérifient $\mathrm{PGCD}(a'\ ;\ b') = 1$

Posons $\begin{cases} a = 27a' \\ b = 27b' \end{cases}$. Par construction et en vzertu du théorème cité en préambule, le PGCD de ces deux entiers est 27, et leur somme est : $a + b = 27a' + 27b' = 27(a' + b') = 27 \times 8 = 216$.

Les entiers naturels non nuls *a* et *b* vérifient : $\begin{cases} a + b = 27 \\ \mathrm{PGCD}(a\ ;\ b) = 27 \end{cases}$, c'est-à-dire qu'ils sont solution du système (I).

Les systèmes (I) et (II) sont donc équivalents moyennant le changement de variable $\begin{cases} a = 27a' \\ b = 27b' \end{cases}$.

3. Résolvons (II) puis (I) :

Ecrivons les décompositions additives de 8 en somme de deux entiers naturels non nuls :

$$8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$$

Parmi ces quatre décompositions additives possibles, deux, et deux seulement, sont des sommes de deux entiers premiers entre eux : $8 = 1 + 7 = 3 + 5$.

Le système (II) a pour solutions les deux seuls couples $\begin{cases} (a',\ b') = (1,\ 7) \\ (a',\ b') = (3,\ 5) \end{cases}$ et leurs symétriques respectifs $\begin{cases} (a',\ b') = (7,\ 1) \\ (a',\ b') = (5,\ 3) \end{cases}$, en tout 4 couples solutions.

Déduisons-en les couples solutions de (I) :

Nous les obtenons tous moyennant le changement de variable $\begin{cases} a = 27a' \\ b = 27b' \end{cases}$.

Les solutions du système (I) sont les couples : $(27,\ 189)\ ;\ (81,\ 135)\ ;\ (189,\ 27)\ ;\ (135,\ 81)$.

Complément. Retrouvons les solutions avec Python :

L'algorithme « pgcd04 » teste un par un tous les couples d'entiers naturels non nuls dont la somme est égale à 216 et affiche ceux qui ont un PGCD égal à 27. Nous retrouvons nos quatre couples solutions.

```
>>> from math import gcd
>>> def pgcd04():
        for a in range(1,216):
            b=216-a
            if gcd(a,b)==27:
                print(a,b)

>>> pgcd04()
27 189
81 135
135 81
189 27
```