Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PGCD

03

Correction

NB. Rappelons le théorème suivant, qui nous sera utile pour la **question 3** :

Soit *a* et *b* deux entiers relatifs non nuls et *d* un de leurs diviseurs communs positifs.

Nous savons qu'il existe alors deux entiers relatifs *a'* et *b'* non nuls tels que $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$.

Théorème : *d* est le PGCD de *a* et de *b* si et seulement si les entiers *a'* et *b'* sont premiers entre eux.

1. Factorisons *x* et *y* :

Soit *X* et *Y* les polynômes du deuxième degré définis respectivement par :

$X(n) = n^2 + 2n - 3$ et $Y(n) = n^2 + 4n + 3$.

- Le polynôme *X* admet 1 pour racine évidente, sa deuxième racine étant -3.
- Le polynôme *Y* admet -1 pour racine évidente, sa deuxième racine étant -3.

Ce qui conduit aux factorisations :

$$X(n) = x = (n-1)(n+3)$$
$$Y(n) = y = (n+1)(n+3)$$

NB. L'hypothèse $n \geq 2$ garantit que l'entier $n-1$ est un entier strictement positif. Il apparaît au vu des factorisations que l'entier $(n+3)$ est un entier (*a fortiori* strictement positif lui aussi) diviseur commun à *x* et à *y*.

2. Déterminons $\mathrm{PGCD}(n+1\,;n-1)$:

Pour cela, commençons par montrer que les deux entiers $n-1$ et $n+1$ ont les mêmes diviseurs communs que les deux entiers $n-1$ et 2.

- Soit *d* un diviseur commun à $n-1$ et à $n+1$.

  Alors, *d* divise aussi leur différence $(n+1)-(n-1) = 2$. Le nombre *d* est un diviseur commun à $n-1$ et à 2.

- Soit réciproquement *d* un diviseur commun à $n - 1$ et à 2.

  Alors, *d* divise aussi leur somme $(n - 1) + 2 = n + 1$. Le nombre *d* est un diviseur commun à $n - 1$ et à $n + 1$.

Il en résulte que l'ensemble des diviseurs communs à $n - 1$ et $n + 1$ est exactement le même que l'ensemble des diviseurs communs à $n - 1$ et à 2. En particulier, le plus grand élément de cet ensemble est, à la fois , le PGCD de $n - 1$ et $n + 1$ et celui de $n - 1$ et 2.

Conclusion :

$$\text{PGCD}(n + 1\ ;\ n - 1) = \text{PGCD}(n - 1\ ;\ 2)$$

NB. Cette relation explique pourquoi l'énoncé nous suggère de distinguer les cas *n* pair et *n* impair, le PGCD de $n - 1$ et 2 est en effet tantôt 1, tantôt 2, suivant la parité de *n*.

- Si *n* est pair, $n - 1$ est impair et $\text{PGCD}(n + 1\ ;\ n - 1) = \text{PGCD}(n - 1\ ;\ 2) = 1$
- Si *n* est impair, $n - 1$ est pair et $\text{PGCD}(n + 1\ ;\ n - 1) = \text{PGCD}(n - 1\ ;\ 2) = 2$

3. Exprimons le PGCD de *x* et de *y* en fonction de *n* :

D'après le cours, nous savons que si *d* est un diviseur commun positif de deux entiers non nuls *a* et *b* et si *a'* et *b'* sont les entiers tels que $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$, alors $\text{PGCD}(a\,;b) = d \times \text{PGCD}(a'\,;b')$

Dans notre contexte, les factorisations obtenues à la question 1 : $\begin{cases} x = (n - 1)(n + 3) \\ y = (n + 1)(n + 3) \end{cases}$ montrent que le nombre entier strictement positif $(n + 3)$ est un diviseur commun à *x* et à *y*.

Par conséquent : $\text{PGCD}(x\ ;\ y) = (n + 3) \times [\text{PGCD}(n + 1\ ;\ n - 1)]$

- Si *n* est pair, le PGCD des entiers $n - 1$ et $n + 1$ est égal à 1, le PGCD de *x* et *y* est $(n + 3)$.
- Si *n* est impair, le PGCD des entiers $n - 1$ et $n + 1$ est égal à 2, le PGCD de *x* et *y* est $2(n + 3)$.

$$\text{PGCD}(x\ ;\ y) = \begin{cases} n + 3 \ \text{ si } n \text{ est pair} \\ 2(n + 3) \ \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Complément. Illustrons l'exercice à l'aide d'un algorithme Python :

Pour n allant de 2 à 10, l'algorithme « pairimpair » calcule en fonction de n les valeurs de x et de y, ainsi que de leur PGCD.

L'algorithme affiche à chaque pas la valeur courante de n et le PGCD de x et de y associé.

Nous reconnaissons dans le PGCD l'entier $n + 3$ qui est doublé lorsque n est impair, conformément à nos conclusions.

```
>>> from math import gcd
>>> def pairimpair():
        for n in range(2,11):
                x=n**2+2*n-3
                y=n**2+4*n+3
                d=gcd(x,y)
                print("Si n=",n,"PGCD(x,y)=",d)


>>> pairimpair()
Si n= 2 PGCD(x,y)= 5
Si n= 3 PGCD(x,y)= 12
Si n= 4 PGCD(x,y)= 7
Si n= 5 PGCD(x,y)= 16
Si n= 6 PGCD(x,y)= 9
Si n= 7 PGCD(x,y)= 20
Si n= 8 PGCD(x,y)= 11
Si n= 9 PGCD(x,y)= 24
Si n= 10 PGCD(x,y)= 13
```