Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PGCD

02

Correction

1. Déterminons une combinaison linéaire de *x* et *y* éliminant n^2 :

NB. L'énoncé nous demande une « combinaison linéaire ». Nous devons entendre dans ce contexte arithmétique une « combinaison entière », c'est-à-dire une combinaison linéaire $ax + by$ de *x* et de *y* dont les coefficients *a* et *b* sont des entiers relatifs.

Le coefficient 5 étant celui de n^2 dans l'expression de *x*, nous pouvons tenter de faire apparaître ce même coefficient dans un multiple « judicieusement choisi » de *y* :

Considérons par exemple le multiple : $5y = 5(n^2 + 2) = 5n^2 + 10$.

Nous pouvons écrire : $5y - x = (5n^2 + 10) - (5n^2 + 7) = 3$.

Une combinaison entière de *x* et *y* permettant l'élimination de n^2 est la combinaison $-x + 5y$:

Nous obtenons en effet : $-x + 5y = 3$

2. Montrons que $\mathrm{PGCD}(x\ ;\ y)$ divise 3 :

NB. Nous allons montrer, plus généralement, que tout diviseur commun à *x* et à *y* divise 3. Il en sera ainsi, en particulier, du PGCD.

Soit *d* un diviseur commun à *x* et à *y*. Il existe donc deux entiers relatifs *x'* et *y'* tels que : $\begin{cases} x = dx' \\ y = dy' \end{cases}$.

Exprimons la combinaison entière $-x + 5y$ à l'aide de *d, x'* et *y'* :

$-x + 5y = -(dx') + 5 \times (dy') = d \times (-x' + 5y')$.

Posons : $u = -x' + 5y'$. En tant que cocktail (additions et multiplications) d'entiers relatifs, *u* est un entier relatif. Nous avons ainsi justifié l'existence d'un entier relatif *u* tel que : $-x + 5y = du$, ce qui signifie que *d* divise la combinaison entière $-x + 5y$. Or, la question précédente a montré que cette combinaison entière était indépendante de *n* et prenait toujours la valeur 3.

Nous pouvons conclure : Tout diviseur commun à *x* et à *y* divise 3.

Parmi les diviseurs communs à *x* et à et à *y*, figure le plus grand d'entre eux, leur PGCD.

En tant que diviseur commun à *x* et à y, PGCD$(x\ ;\ y)$ est un diviseur de 3.

NB. Nous en déduisons que ce PGCD est égal ou bien à 1 ou bien à 3.

3. Montrons que si $n \equiv 2\ \ [3]$, alors PGCD$(x\ ; y) = 3$:

Supposons que le reste de la division euclidienne de *n* par 3 soit égal à 2. Désignons par *q* le quotient de cette division euclidienne, de sorte que *n* s'écrit ainsi : $n = 3q + 2$.

Exprimons dans ces conditions *x* et *y* en fonction de *q* :

- D'une part $x = 5n^2 + 7 = 5(3q + 2)^2 + 7 = 5(9q^2 + 12q + 4) + 7 = 45q^2 + 60q + 27$. L'entier *x* est un multiple de 3, en effet : $x = 3 \times (15q^2 + 20q + 9)$.
- D'autre part $y = n^2 + 2 = (3q + 2)^2 + 2 = (9q^2 + 12q + 4) + 2 = 9q^2 + 12q + 6$. L'entier *y* est un multiple de 3, en effet : $y = 3 \times (3q^2 + 4q + 2)$.

Il en résulte que 3 est un diviseur commun à *x* et à *y*. Il divise donc leur PGCD. Mais la question précédente a établi que ce PGCD divise 3. Les entiers 3 et PGCD$(x\ ;\ y)$ sont deux entiers naturels qui se divisent mutuellement, ils sont égaux.

Si le reste de la division euclidienne de *n* par 3 est égal à 2, alors PGCD$(x\ ;\ y) = 3$.

4. Justifions que PGCD$(5 \times 101^2 + 7\ \ ;\ \ 101^2 + 2) = 3$:

Les deux nombres en jeu sont les nombres *x* et *y* associés à l'entier $n = 101$ dans le contexte de cet exercice. Effectuons la division euclidienne de 101 par 3 : $101 = 99 + 2 = 3 \times 33 + 2$.

Le reste de la division euclidienne de 101 par 3 est égal à 2, l'entier $n = 101 = 3 \times 33 + 2$ vérifie les hypothèses de la **question 3**, nous pouvons en appliquer la conclusion :

Le PGCD des deux nombres en jeu est bien égal à 3.

NB. Vérification avec une calculatrice :

$5 \cdot 101^2 + 7$	51012
$101^2 + 2$	10203
gcd(51012,10203)	3