

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

PGCD, Bézout & Gauss



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ

Les nombres de Fermat sont les termes de la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par:

$$U_n = 2^{2^n} + 1.$$

1. a. Démontrer que pour tout entier naturel: $U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1$.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$U_{n-2} = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}.$$

2. a. m et n désignent deux nombres entiers naturels non nuls tels que $m < n$.

Montrer qu'il existe un entier naturel a tel que: $U_n = c \cdot U_m + 2$.

b. Justifier que: $\text{PGCD}(U_m; U_n) = \text{PGCD}(U_m; 2)$.

c. En déduire que: $\text{PGCD}(U_m; U_n) = 1$.