Maths Expertes

Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PGCD

13

Correction

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2^{2^n} + 1$.

Les trois premiers termes de cette suite sont les suivants :

$$u_0 = 2^1 + 1 = 3 \ ; \ u_1 = 2^2 + 1 = 5 \ ; \ u_2 = 2^4 + 1 = 17$$

Rappelons le lemme d'Euclide :

Si a, b, q, r sont des entiers relatifs non nuls tels que $a = bq + r$, alors $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = \mathrm{PGCD}(b\,;r)$.

1.a. Démontrons la formule de récurrence : $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$:

Par définition du terme de rang $n+1$: $u_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2\times 2^n} + 1$

D'après les règles de calcul sur les puissances : $2^{2\times 2^n} = \left(2^{2^n}\right)^2$.

Or, par définition du terme se rang n : $2^{2^n} = u_n - 1$.

Nous obtenons bien : $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.

1.b. Démontrons la formule de récurrence : $u_n - 2 = u_0 \times \ldots \times u_{n-1}$:

Appelons « propriété $\wp_n$ » la propriété : « $u_n - 2 = u_0 \times \ldots \times u_{n-1}$ ».

Initialisation : Lorsque $n = 1$, $\begin{cases} u_1 - 2 = 5 - 2 = 3 \\ \prod_{k=0}^{1-1} u_k = u_0 = 3 \end{cases}$. Les deux expressions donnent le même résultat.

La propriété $\wp_1$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier $n \geq 1$, la propriété $\wp_n$ soit vérifiée, c'est-à-dire que :

$$u_n - 2 = u_0 \times \ldots \times u_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} u_k$$

Au rang suivant, et d'après la formule de récurrence établie à la **question 1.a** :

$u_{n+1} - 2 = ((u_n - 1)^2 + 1) - 2 = \left((u_n{}^2 - 2u_n + 1) + 1\right) - 2 = u_n{}^2 - 2u_n$.

Nous obtenons la relation : $u_{n+1} - 2 = (u_n - 2) \times u_n$.

Appliquons l'hypothèse selon laquelle la propriété $\wp_n$ est vérifiée :

$$u_{n+1} - 2 = (u_0 \times \dots \times u_{n-1}) \times u_n = \prod_{k=1}^{(n+1)-1} u_k$$

Nous avons démontré l'implication $\wp_n \;\Rightarrow\; \wp_{n+1}$, la « propriété $\wp_n$ » est héréditaire.

Concluons :

- La propriété $\wp_n$ est initialisée au rang 1.
- Elle est héréditaire.

Nous pouvons affirmer qu'elle est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Quel que soit l'entier strictement positif *n*, $u_n - 2 = u_0 \times \dots \times u_{n-1}$.

2.a. Montrons que pour $0 \leq m < n$, il existe *c* tel que $u_n = c \times u_m + 2$:

Soit *m* et *n* deux entiers vérifiant les inégalités : $0 \leq m < n$.

Considérons la formule de récurrence démontrée à la **question 1** : $u_n - 2 = u_0 \times \dots \times u_{n-1}$.

Par hypothèse $m < n$, donc le terme de rang m figure en tant que facteur dans le produit $u_0 \times \dots \times u_{n-1}$.

Précisément, nous pouvons écrire : $u_n - 2 = (u_0 \times \dots \times u_{m-1}) \times u_m \times (u_{m+1} \times \dots \times u_n)$.

NB. Si $m = 0$, la première parenthèse est absente, il reste la parenthèse $(u_{0+1} \times \dots \times u_n)$.

Définissons le nombre entier strictement positif *c* (car produit d'entiers strictement positifs) :

$$c = (u_0 \times \dots \times u_{m-1}) \times (u_{m+1} \times \dots \times u_n) = \prod_{\substack{k \neq m \\ 1 \leq k \leq n-1}} u_k$$

Nous obtenons : $u_n = c \times u_m + 2$.

NB. Nous avons ainsi obtenu une « combinaison entière » de *u_m* et de *u_m* : les coefficients de cette combinaison sont des nombres entiers.

2.b. Justifions que $\mathrm{PGCD}(u_m, u_n) = \mathrm{PGCD}(u_m, 2)$:

La relation $u_n = c \times u_m + 2$ est une combinaison entière à laquelle nous pouvons appliquer le lemme d'Euclide avec les paramètres : $a = u_n$; $q = c$; $b = u_m$; $r = 2$.

En vertu du lemme d'Euclide : PGCD$(u_m\ ;\ u_n) =$ PGCD$(u_m\ ;\ 2)$.

2.c. Montrons que u_m et u_n sont premiers entre eux :

Pour tout entier naturel m, l'exposant 2^m est un entier strictement positif, donc 2^{2^m} est un nombre pair et $u_m = 2^{2^m} + 1$ est un nombre impair. En conséquence : PGCD$(u_m\ ;\ 2) = 1$.

Pour tout couple (m, n)d'entiers tels que $0 \leq m < n$, PGCD$(u_m\ ;\ u_n) =$ PGCD$(u_m\ ;\ 2) = 1$.

Deux termes de la suite (u_n) d'indices distincts sont toujours premiers entre eux.