Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Freemaths : Tous droits réservés

PGCD

01

Correction

NB. Soit *a* et *d* des entiers relatifs. Rappelons que les formulations suivantes sont équivalentes :

- *d* divise *a*.
- *a* est multiple de *d*.
- Il existe un entier relatif *a'* tel que $a = da'$

1. Justifions qu'un diviseur commun à *x* et à *y* divise aussi *m* et *n* :

Soit *d* un diviseur commun à *x* et à *y*. Il existe donc deux entiers relatifs *x'* et *y'* tels que : $\begin{cases} x = dx' \\ y = dy' \end{cases}$.

Exprimons *m* et *n* à l'aide de *d, x'* et *y'* :

- D'une part : $m = 3x + 4y = 3 \times (dx') + 4 \times (dy') = d \times (3x' + 4y')$.
- D'autre part : $n = 2x + 3y = 2 \times (dx') + 3 \times (dy') = d \times (2x' + 3y')$.

Posons : $m' = 3x' + 4y'$ et $n' = 2x' + 3y'$.

En tant que cocktails (additions et multiplications) d'entiers relatifs, *m'* et *n'* sont des entiers relatifs.

Nous avons justifié l'existence de deux entiers relatifs *m'* et *n'* tels que : $\begin{cases} m = dm' \\ n = dn' \end{cases}$, ce qui signifie que *d* divise à la fois *m* et *n*, c'est un diviseur commun à *m* et à *n*.

Tout diviseur commun à *x* et à *y* est aussi un diviseur commun à *m* et à *n*.

2.a. Calculons $3m - 4n$ en fonction de *x* et de *y* :

$3m - 4n = 3(3x + 4y) - 4(2x + 3y) = (9x + 12y) - (8x + 12y)$.

Nous obtenons en fin de compte : $3m - 4n = x$

2.b. Calculons $3n - 2m$ en fonction de *x* et de *y* :

$3n - 2m = 3(2x + 3y) - 2(3x + 4y) = (6x + 9y) - (6x + 8y)$.

Nous obtenons en fin de compte : $3n - 2m = y$

.

3. Déduisons-en qu'un diviseur commun à *m* et à *n* divise aussi *x* et *y* :

NB. Les résultats des **questions 2.a et 2.b** expriment *x* et *y* comme étant des combinaisons entières de *m* et de *n*. Ils nous permettent ainsi de reproduire au mot près la justification que nous avons proposée à la **question 1**, en échangeant les rôles de *x* et *y* avec ceux de *m* et *n*.

Soit *d* un diviseur commun à *m* et à *n*. Il existe donc deux entiers relatifs *m'* et *n'* tels que : $\begin{cases} m = dm' \\ n = dn' \end{cases}$.

Exprimons *x* et *y* à l'aide de *d, m'* et *n'* :

- D'une part : $x = 3m - 4n = 3 \times (dm') - 4 \times (dn') = d \times (3m' - 4n')$.
- D'autre part : $y = 3n - 2m = 3 \times (dn') - 2 \times (dm') = d \times (3n' - 2m')$.

Posons : $x' = 3m' - 4n'$ et $y' = 3n' - 2m'$.

En tant que cocktails (additions et multiplications) d'entiers relatifs, *x'* et *y'* sont des entiers relatifs.

Nous avons justifié l'existence de deux entiers relatifs *x'* et *y'* tels que : $\begin{cases} x = dx' \\ y = dy' \end{cases}$, ce qui signifie que *d* divise à la fois *x* et *y*, c'est un diviseur commun à *x* et à *y*.

Tout diviseur commun à *m* et à *n* est aussi un diviseur commun à *x* et à *y*.

4.a. Disons quelque chose à propos du PGCD de *x* et de *y* :

- En tant que plus grand des diviseurs communs à *x* et à *y*, c'est un entier naturel non nul.
- En vertu du résultat de la **question 1**, en tant que diviseur commun à *x* et à *y*, il est aussi diviseur commun à *m* et à *n* et à ce titre, il est inférieur ou égal au PGCD de *m* et de *n*.

4.b. Disons quelque chose à propos du PGCD de *m* et de *n* :

- En tant que plus grand des diviseurs communs à *m* et à *n*, c'est un entier naturel non nul.
- En vertu du résultat de la **question 3**, en tant que diviseur commun à *m* et à *n*, il est aussi diviseur commun à *x* et à *y* et à ce titre il est inférieur ou égal au PGCD de *x* et de *y*.

Faisons la synthèse des questions 4.a et 4.b :

$$\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x\,;\,y) \leq \mathrm{PGCD}(m\,;\,n) \\ \mathrm{PGCD}(m\,;\,n) \leq \mathrm{PGCD}(x\,;\,y) \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{PGCD}(m\,;\,n) = \mathrm{PGCD}(x\,;\,y)$$